

生物数学与微分方程讲义

史峻平

Y.Y.Tseng Functional Analysis Research Center, Harbin Normal University,
Harbin, Heilongjiang, 150025, P.R.China.

Department of Mathematics, College of William and Mary,
Williamsburg, Virginia, 23187-8795, USA.

Email: jxshix@wm.edu.

目 录

第一章 单变元模型	3
1.1 一阶常微分方程的定性分析	3
1.2 一阶一元常微分方程的分歧	6
1.3 一阶差分方程及其分歧	8
1.4 生物数学中的单变量模型	10
1.5 生物数学中单变元差分方程的模型	15
1.6 第一章练习题	17
第二章 多变元模型	19
2.1 一阶线性平面系统	19
2.2 一阶非线性平面系统	21
2.3 生物数学中常见二元常微分方程组模型	24
2.4 方程的非量纲化 (nondimensionalization)	28
2.5 平面系统的分歧, 周期轨道分析	30
2.6 二元离散模型	35
2.7 第二章练习题	37
第三章 反应扩散方程	39
3.1 扩散方程	39
3.2 基本解及生物应用	41
3.3 边值问题及生存最小区域	43
3.4 反应扩散方程, 行波解	45
3.5 第三章练习题	47
第四章 反应扩散方程的分歧理论	49
4.1 Banach 空间与可微性	49
4.2 函数空间	49
4.3 隐函数定理与分歧定理	51
4.4 单变元反应扩散方程的分歧	53

	1
4.5 带扩散的竞争模型中的分歧	58
4.6 Turing 不稳定性和分歧	60
4.7 第四章习题	60
第五章 比较方法	63
5.1 椭圆方程的极值原理	63
5.2 先验估计	65
5.3 椭圆型方程的上下解方法	67
5.4 抛物型方程的极值原理和比较原理	71
5.5 第五章练习题	73
第六章 变分, 能量与梯度	75
6.1 常微分方程 Hamilton 系统	75
6.2 耗散系统和梯度系统	77
6.3 反应扩散方程中的能量变化	78
6.4 抽象动力系统	80
6.5 抛物型方程的吸引子	81
参考文献	85

第一章 单变元模型

§1.1 一阶常微分方程的定性分析

表示一种事物随时间或其他变量变化的最简单的数学模型是一阶单变元微分方程 (first order scalar ordinary differential equation), 其中自治方程 (autonomous equation) 有如下形式:

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(0) = y_0, \quad (1.1)$$

在这里, $y: S \rightarrow \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}$ 是一个可微函数, y_0 是初始值 (initial value)。

(1.1) 可以用以下方法处理:

(A) **解析方法 (analytic method)**: 即求出方程的解的公式, 例如:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ky, \quad y(0) = y_0 \text{ 的解为 } y(t) = y_0 e^{kt}; \\ \frac{dy}{dt} &= ky(1-y), \quad y(0) = y_0 \text{ 的解为 } y(t) = \frac{y_0 e^{kt}}{1 - y_0 + y_0 e^{kt}}. \end{aligned}$$

但是当 $f(y)$ 为非线性函数时, 一般很难解出。

(B) **数值方法 (numerical method)**: 用近似公式

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

可将 (1.1) 化为如下差分方程:

$$\begin{cases} y(t + \Delta t) = y(t) + f(y(t))\Delta t \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

(1.2) 很容易用计算机迭代算出。这种迭代方法也被称为 Euler 方法。差分方程和数值解将在 1.3 节专门介绍。

(C) **定性方法 (Qualitative Method)**: 即不把方程的显示解求出, 但利用解的性质来得到问题的答案。

平衡解 (equilibrium, steady state) 是 (1.1) 形为 $y(t) = y_0$ 的常数解, 其中 $f(y_0) = 0$ 。

相线 (phase line) 是 (1.1) 解的渐近行为的一种直观表示图。

例1.1.

$$y' = y(1-y)^2(y-3), \quad y(0) = y_0. \quad (1.3)$$

平衡解为 $y = 0$, $y = 1$ 和 $y = 3$ 。

渐近行为 (asymptotic behavior) 是方程解趋于无穷的行为, 既可以是时间 $t \rightarrow \infty$, 也可能是解 $y(t) \rightarrow \infty$ 。

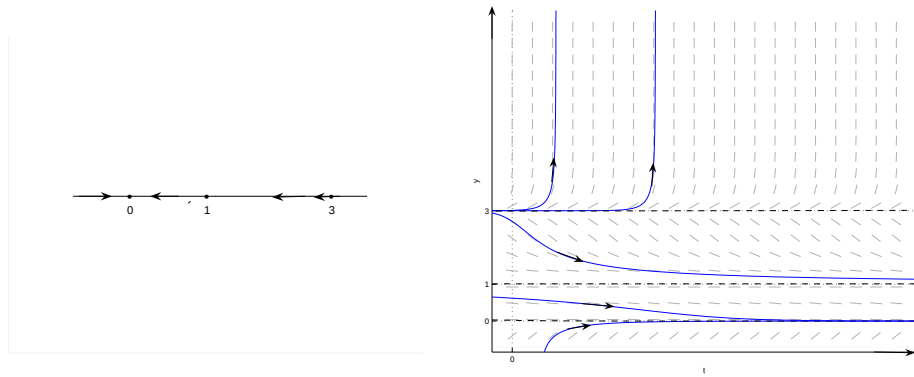


图 1.1 (左): (1.3) 的相线, (右): (1.3) 的解的图像

例1.2. (a)

$$y' = y(1-y)^2(y-3), \quad y(0) = 2 \quad (1.4)$$

虽然解很难求出, 但是从相图上可以看到, 解的定义域为 $(-\infty, \infty)$, 并且:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 3,$$

即解收敛到一个平衡解 (converges to an equilibrium).

(b)

$$y' = y, \quad y(0) = 1 \quad (1.5)$$

的解是 $y(t) = e^t$, 其定义域为 $(-\infty, \infty)$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = 0, \quad \text{而} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty,$$

即解趋于无穷大 (tends to infinite in infinite time).

(c)

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1 \quad (1.6)$$

的解是 $y = \frac{1}{1-t}$, 其定义域为 $(-\infty, 1)$, 而当 $t \rightarrow 1^+$ 时, $y(t) \rightarrow \infty$, 我们称解在有限时间爆破 (finite time blow up).

(d)

$$y' = \frac{1}{2-y}, \quad y(0) = 1 \quad (1.7)$$

的解是 $y(t) = 2 - \sqrt{1-2t}$, 定义域为 $(-\infty, \frac{1}{2})$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow (1/2)^+} y(t) = 2, \quad \text{而} \quad \lim_{t \rightarrow (1/2)^-} y'(t) = \infty,$$

即解在有限时间内导数爆破 (derivative blows up in finite time).

定理1.1. 考虑方程 (1.1),

1. 如果 $f(y)$ 在 $y = y_0$ 附近连续, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 (1.1) 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中有一个解;

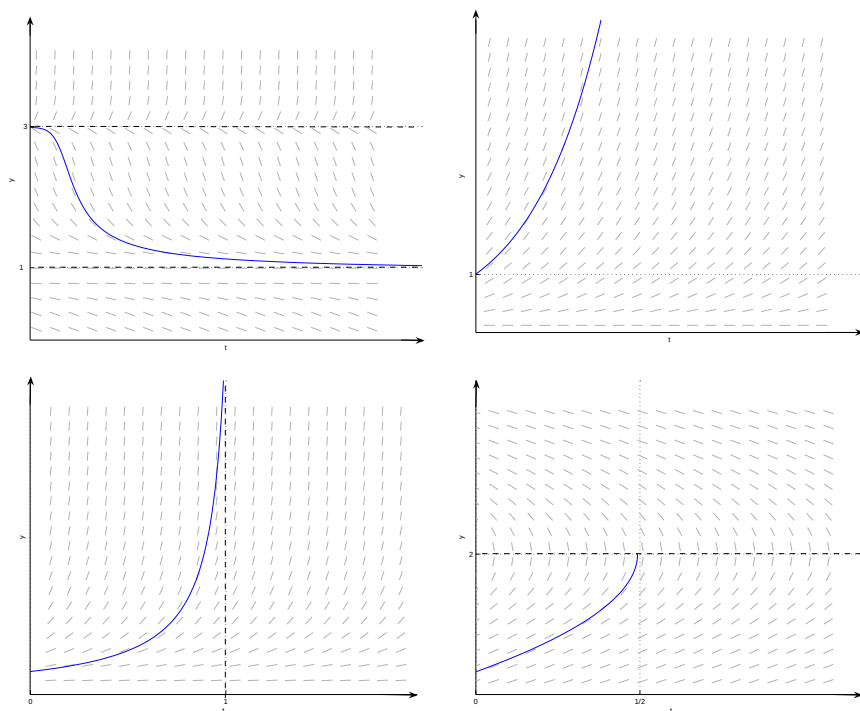


图 1.2 四种解的渐近行为, 依次为 (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) 解的图像

2. 如果 $f(y)$ 在 $y = y_0$ 附近连续可微, 则存在 $\varepsilon > 0$ 使得 (1.1) 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中有唯一一个解;
3. 解 $y(t)$ 可以被延拓到一个最大存在区间 $I = (-T_1, T_2)$, $0 < T_1, T_2 \leq \infty$.
4. 若 $f(y)$ 在 I 上连续可微, 则 $y(t)$ 在 I 上或为严格单增函数, 或为严格减函数, 或为一平衡解;
5. 若 $f(y)$ 在 I 上连续可微, 则 $y(t)$ 在 I 的端点的渐近行为只可能为以下四种:
 - a) 趋于一个平衡解, b) 趋于无穷大, c) 爆破, d) 导数爆破。

方程 (1.1) 相图的画法:

1. 先画出一条水平或垂直的直线段;
2. 求出 $f(y)$ 的零点, 不连续点或定义域以外的点;
3. 在零点, 不连续点和非定义域点分成的每个线段上按 $f(y)$ 的符号画出箭头: 若 $f(y) < 0$, 为 $(\leftarrow)$; 若 $f(y) > 0$, 则为 $(\rightarrow)$.

下图是相线的几个例子:

设 y_0 是 (1.1) 的一个平衡解, 如果存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, 以 y 为初值的解满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$, 则平衡解 y_0 是稳定的, 或称为一个汇 (sink); 而如果如果存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, 以 y 为初值的解满足 $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = y_0$, 则平衡解 y_0 是不稳定的, 或称为一个源 (source); 既不是汇又不是源的平衡解称为结点 (node).

一个平衡点的类型很容易从相线在平衡点两侧的箭头方向来判断。但是在应用问题中, 我们更需要先判断平衡点类型, 然后从中得到相线方向, 因此下面的线性化定理是有用的。



图 1.3 平衡解的类型, (左): 汇, (中): 源, (右): 结点

定理1.2. 若 $f(y_0) = 0$, $f(y)$ 在一个小区间 $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ 上连续可微, 那么:

- (1) 若 $f'(y_0) < 0$, 则 y_0 是一个汇;
- (2) 若 $f'(y_0) > 0$, 则 y_0 是一个源;
- (3) 若 $f'(y_0) = 0$, 我们无法判断该平衡点的类型。

§1.2 一阶一元常微分方程的分歧

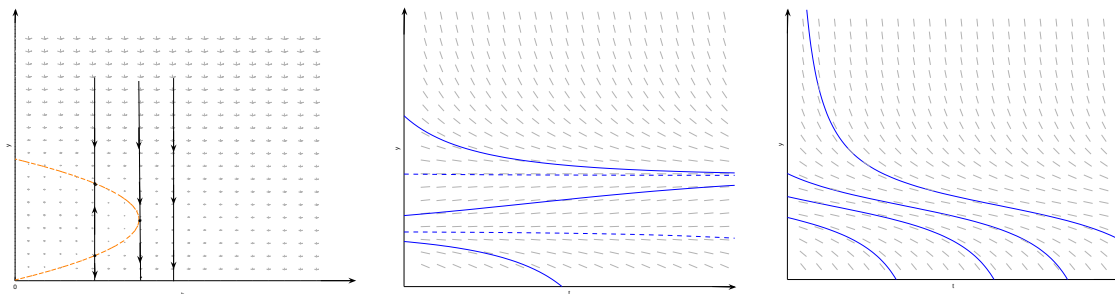
一个微分方程解的渐近行为随参数变化发生了类型的变化, 我们称之为**分歧现象 (或分支, 分枝, 分叉)(bifurcation)**。

例1.3. 考虑下述方程:

$$y' = y(1 - y) - h, \quad (1.8)$$

在这里, $y(t)$ 代表一个生物物种的个数, 而 h 代表该生物在单位时间内被人类猎取的数量。求 (1.8) 的平衡解得到

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4h}}{2}.$$

图 1.4 方程 (1.8) 的分歧图和解的图像, (左): 分歧图, (中): $h < \frac{1}{4}$, (右): $h > \frac{1}{4}$

$h = \frac{1}{4}$ 是 (1.8) 的分歧点, 当 $h < \frac{1}{4}$ 时 (1.8) 有两个正平衡点, 当 $h = \frac{1}{4}$ 时两个平衡点合二为一, 而当 $h > \frac{1}{4}$ 时 (1.8) 没有平衡解。事实上, (1.8) 的平衡解满足 $h = y(1 - y)$, 那么 $h = y(1 - y)$ 在 $h - y$ 坐标系上的图像可以认为是一个**分歧图 (bifurcation diagram)**。分歧图也可以看成是一组不同的相线的集合。这里我们用垂直方向的相线, 那么水平坐标 h 是参数坐标 (见图 1.4 左)。

若我们考虑以 $y(0) = \frac{1}{2}$ 为初值的解 $y_h(t)$, 那么当 $h < \frac{1}{4}$ 时, $y_h(t)$ 收敛到一个平衡解, 而当 $h > \frac{1}{4}$ 时, $y_h(t)$ 在有限时间内变为 0 (事实上会在有限时间爆破到 $-\infty$)。

一般来说, 对于一个含参数的方程:

$$y' = f(\lambda, y), \quad (1.9)$$

可以通过解如下形式的方程组：

$$\begin{cases} f(\lambda, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda, y) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

得到 (λ, y) , λ 为可能的分歧点, y 为发生分歧的平衡解坐标。

例如, 对于方程 (1.8), 从

$$\begin{cases} y(1-y) - h = 0 \\ 1 - 2y = 0 \end{cases}$$

可求得 $(h, y) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. 从图 1.4 可以看到分歧是在抛物线 $f(y) = y(1-y) - h$ 与 h 轴相切的时候发生。

因为在后面我们会详尽地描述更一般形式的分歧理论, 所以我们不对一维的情况做更多介绍。这里我们只是用例子指出几种基本的分歧类型：

例1.4. (a) 例 1.3 中的方程 (1.8) 的分歧称为**鞍结点分歧 (saddle-node bifurcation)**. 在分歧点一侧有两个平衡点, 另一侧没有。这类分歧图在分歧点附近是抛物线的形状。对于更一般的方程 (1.9), 鞍结点分歧发生的条件是 (分歧点为 (λ_0, y_0)) (1.10) 中的两个方程和

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(\lambda_0, y_0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\lambda_0, y_0) \neq 0. \quad (1.11)$$

(b) 考虑下述方程：

$$y' = y(y^2 - \lambda). \quad (1.12)$$

很容易看出 $\lambda = 0$ 是一个分歧点, 在分歧点的一侧有三个平衡点, 另一侧为一个。这类分歧称为**音叉分歧 (pitchfork bifurcation)**. *Bifurcation* 一词来源于拉丁语的词 *bifurca*, 意思是带两个岔的叉子。音叉分支的分歧图形状正是 *bifurcation* 原意所指。它发生地条件是 (1.10) 和

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial y}(\lambda_0, y_0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\lambda_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\lambda_0, y_0) \neq 0, \quad (1.13)$$

其中, $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, y_0) = 0$ 这个条件往往用 $f(\lambda, y_0) \equiv 0$ 代替。

(c) 考虑下述方程：

$$y' = y(y - \lambda). \quad (1.14)$$

$\lambda = 0$ 是一个分歧点。虽然分歧点的两侧都是两个平衡点, 但平衡点的稳定性会改变。根据定理 1.2, $y = 0$ 在 $\lambda < 0$ 时不稳定, 而在 $\lambda > 0$ 时稳定。稳定平衡解从 $\lambda < 0$ 时的 $y = \lambda$ 变到 $\lambda > 0$ 时的 $y = 0$. 这类分歧称为**跨越分歧 (transcritical bifurcation)**, 发生的条件为 (1.10) 和

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial y}(\lambda_0, y_0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\lambda_0, y_0) \neq 0. \quad (1.15)$$

类似音叉分歧, 一般对于所有的 λ , $y = y_0$ 是一个常数解。

(d) 考虑下述方程：

$$y' = y(y^2 - \varepsilon) - \lambda \equiv f(\varepsilon, \lambda, y). \quad (1.16)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, (1.16) 变为 $y' = y^3 - \lambda$, 其唯一平衡解 $y = \sqrt[3]{\lambda}$ 在 $\lambda = 0$ 时为一个三阶奇点, 即

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0, 0) = 0, \quad \text{而} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0, 0) \neq 0.$$

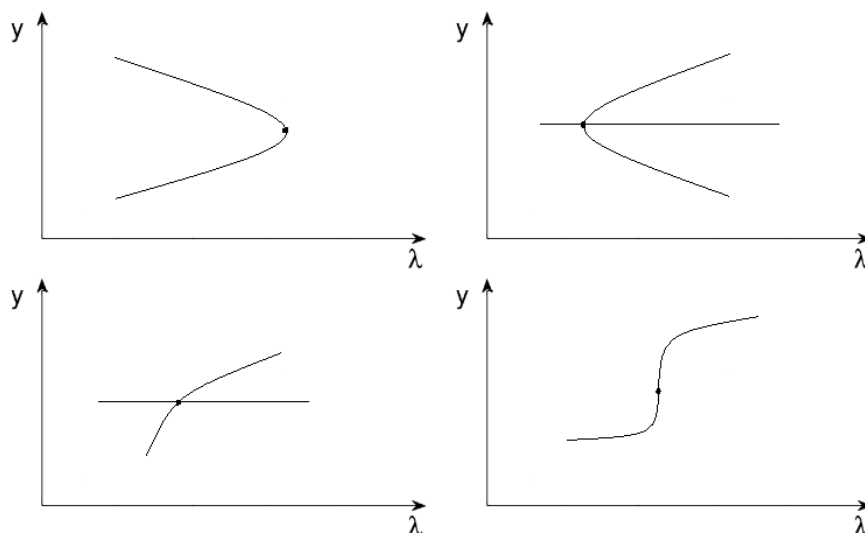


图 1.5 典型分歧图, (上左): 鞍结点分歧, (上右): 音叉分歧, (下左): 跨越分歧, (下右): 尖点分歧

在一个小扰动 $\varepsilon > 0$ 下, (1.16) 在 λ 小时有三个平衡解, 其分歧图上有两个相反方向的鞍结点分歧。这一分歧实际上是一个两个参数的分歧现象。在 $\varepsilon = 0$ 时的奇点称为一个**尖点 (cusp)**。

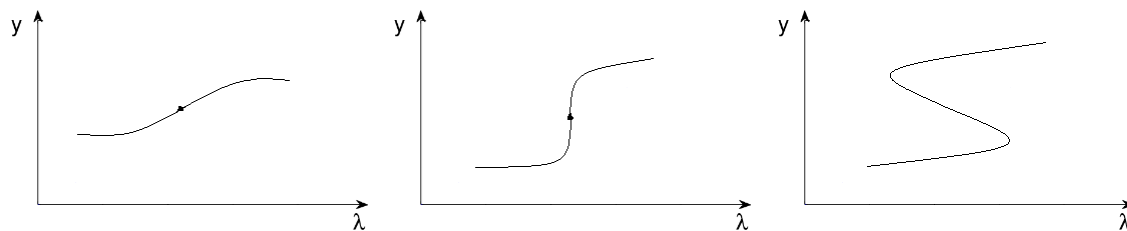


图 1.6 尖点分歧示意图, (左): $\varepsilon < 0$, (中): $\varepsilon = 0$, (右): $\varepsilon > 0$

尖点分歧发生的条件是 (1.10) 和

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda^2}(\lambda_0, y_0) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\lambda_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\lambda_0, y_0) \neq 0. \quad (1.17)$$

§1.3 一阶差分方程及其分歧

在 1.1 节中我们已经看到微分方程 (1.1) 可以离散化为一个形如 (1.2) 的差分方程。更一般地, 我们可以考虑一个形如

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad y_0 = a \quad (1.18)$$

的**差分方程 (difference equation)**或映射 (map). 在这里 $a \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$. $\{y_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ 是一个实数列 (sequence). 和微分方程类似, 可以显式解出的差分方程并不多, 但是我们指出线性方程:

$$y_{n+1} = ay_n + b, \quad y_0 = c$$

的解为 $y_n = y_* + a^{n-1}(y_0 - y_*)$, 其中 $y_* = \frac{b}{1-a}$ 是方程的平衡解。这个解假设 $a \neq 1$. 若 $a = 1$, 则我们得到等差数列 $y_n = y_0 + (n-1)a$. 注意当 $a \neq 1$ 时, $(y_n - y_*)$ 是一个等比数列。

对于差分方程 (1.18), 平衡解 y 满足:

$$y = f(y). \quad (1.19)$$

因此我们一般称平衡解为不动点 (fixed point). 注意到 (1.18) 在一个平衡点 y_* 附近的线性化方程形为

$$y_{n+1} = y_* + f'(y_*)(y_n - y_*), \quad (1.20)$$

所以由等比数列性质容易得出一个不动点的稳定性定理:

定理1.3. 若 $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(y_*) = 0$, 那么:

- (1) 若 $|f'(y_*)| < 1$, 则 y_* 是稳定的;
- (2) 若 $|f'(y_*)| > 1$, 则 y_* 是不稳定的。

显然, 当 $|f'(y_*)| < 1$ 时, 若 y_0 在 y_* 的一个小邻域内, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_*$. 不过不同于微分方程 (1.1), $\{y_n\}$ 在 $0 > f'(y_*) > -1$ 时是一个振荡趋近于 y_* 的数列, 而 $\{y_n\}$ 在 $0 < f'(y_*) < 1$ 时是一个单调趋近于 y_* 的数列。

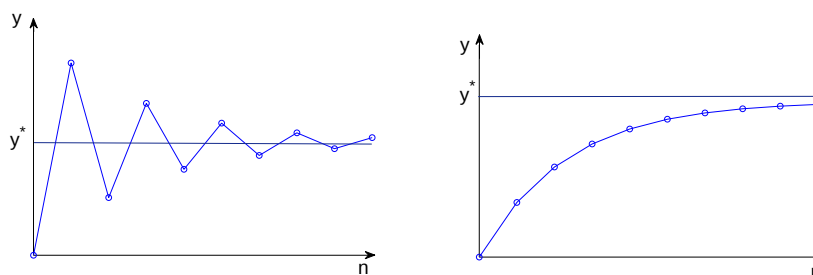


图 1.7 两种稳定不动点的渐近行为, (左): $0 > f'(y_*) > -1$, (右): $0 < f'(y_*) < 1$

例1.5. 考虑下述方程:

$$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n), \quad y_0 = a. \quad (1.21)$$

除了 $y_* = 0$ 是一个平凡不动点外, $y_r = 1 - \frac{1}{r}$ 是一个随参数 r 变化的不动点。容易得到 $f'(y_r) = -r + 2$, 则 $r = 1$ 是一个跨越分支点, 使得 $f'(y_r) = 1$, 当 $r < 1$ 时 y_r 为负, 而当 $r > 1$ 时 y_r 为正。当 $1 < r < 3$ 时 y_r 是一个稳定不动点, 而当 $r > 3$ 时 y_r 不再是稳定的。这时候用计算机对 (1.21) 的解进行数值模拟更容易看出系统的变化和分歧:

- (i) 当 $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ (约 3.45) 时, 任何解趋向于一个周期为 2 的解;
- (ii) 当 r 在 3.45 和 3.54 之间时, 任何解趋向于一个周期为 4 的解;
- (iii) 当 r 进一步增加, 周期为 8, 16, 32 的解相继出现。这一现象称为**周期倍增序列** (period doubling cascade);
- (iv) 当 r 增至 3.57 左右, 解呈现**混沌 (chaos)**状态, 即并非周期振荡, 解的渐近行为不随初值连续变化。事实上这时候 (1.21) 不仅有周期为 2^n 的周期解, 而且有周期为任何整数 n 的周期解。
- (v) 当 r 在 3.57 和 4 之间的大多数 r 值, (1.21) 都会看上去是混沌的, 但也有一些值, 解是不混沌而是收敛的。

(vi) 当 $r > 4$ 以后, 大多数解事发散无界的。

整个从 $r = 1$ 到 4 的分歧图也可由数值模拟得出。

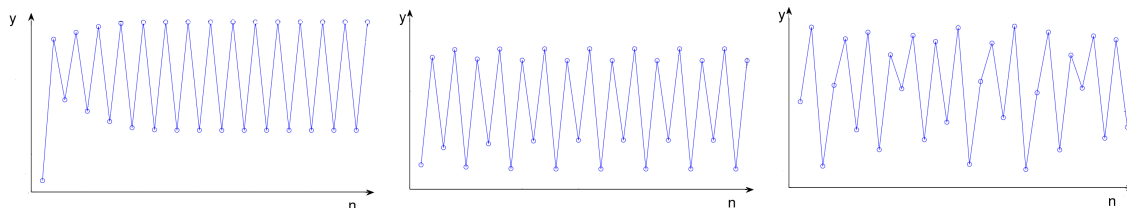


图 1.8 从规则振荡到混沌, (左): 周期 2 的解, (中): 周期 4 的解, (右): 混沌

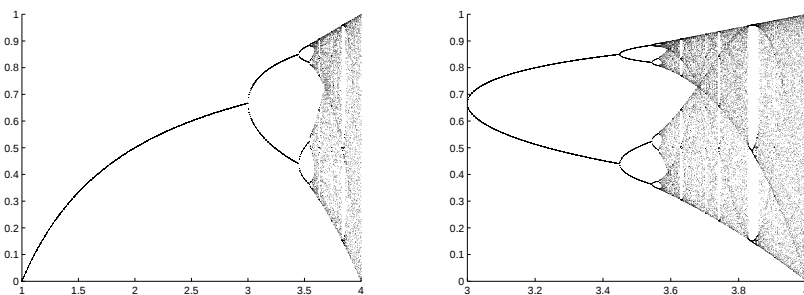


图 1.9 Logistic 映射分歧图: (左) $1 < r < 4$; (右) $3 < r < 4$.

从例 1.5 可以看出貌似简单的 Logistic 映射产生非常复杂的动态行为。我们这里不在混沌复杂动力系统这一方向再做深入介绍。但是我们指出在 $r = 3$ 的分歧是当 $f'(y_r) = -1$ 时发生的。从一个稳定不动点到一个稳定周期解的分歧称为**翻转分歧** (flip bifurcation)。后面对于微分方程, 我们会考虑从稳定不动点到周期解的**Hopf 分歧** (Hopf bifurcation)。这两种分歧从某种意义上来说是类似的。另外我们指出周期 2 的解是 $f^2 = f \circ f$ 的不动点, 所以差分方程的周期解和不动点可以统一成一类不变解。类似的, 若 y_* 是周期的 2 解中一个点, 当 $(f^2)'(y_*) = -1$ 时周期 2 的解会进一步分歧出周期解。这类分歧称为**周期倍增分歧** (period doubling bifurcation)。在 $3 < r < 3.57$ 指间, 无穷多个周期倍增分歧发生。

最后我们指出微分方程 (1.1) 和差分方程的联系: 在 (1.2) 中若令 $\Delta t = 1$, 则 (1.1) 可化为下述方程:

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n). \quad (1.22)$$

这个形式与 (1.18) 的形式分别解释了定理 1.3 中的分支值是 $|f'(y_*)| = 1$ 而不是像定理 1.2 中的 $|f'(y_*)| = 0$, 从这个角度看 (1.22) 应称为差分方程, 而 (1.18) 应称为映射, 但是一般不强调两者的区别。

§1.4 生物数学中的单变量模型

令 $y(t)$ 为一个生物种群的数量, t 为时间。那么最简单的种群模型是**Malthus 模型**(Malthus, 1798):

$$y' = ky, \quad k > 0. \quad (1.23)$$

Malthus 模型的解 $y(t) = y(0)e^{kt}$ 预测了种群数量的指数增长。由于种群数量大的时候，对资源的竞争加剧，因此单位增长率会随种群数目增大而减小，因此更为合理的假设是

$$y' = yf(y), \quad (1.24)$$

这里 $f(y)$ 是单位增长率 (grow rate per capita)，因为 y' 为增长率， y 是种群数量，而 $f(y) = \frac{y'}{y}$ 。1838 年，Vehulst 提出了 **Logistic 模型**：

$$y' = ky(1 - \frac{y}{N}), \quad (1.25)$$

这里 $k > 0$ 为最大单位增长率， $N > 0$ 是系统承载能力 (carrying capacity)。我们在例 1.3 中考虑的是带捕获项的 Logistic 模型：

$$y' = ky(1 - \frac{y}{N}) - h, \quad (1.26)$$

这里 h 是单位时间捕获率。(1.25) 和 (1.26) 的动力行为已经在 1.1 节和 1.2 节讨论了。(1.26) 中的分歧点 $h_* = \frac{kN}{4}$ 被称为最大可承受收获 (Maximum Sustainable Yield)。即若 $h > h_*$ ，种群 $y(t)$ 一定在有限时间内灭绝。

(1.26) 中假设单位时间捕获量为一个常数，这在某些应用中是合理的。例如可以规定对某种近于灭绝的种群的捕获做一个配额。另一种捕获方程形为 (Logistic equation with constant harvesting effect)：

$$y' = ky(1 - \frac{y}{N}) - Ey, \quad (1.27)$$

这里 E 代表捕获的能力，而单位时间捕获量 Ey 是和当时种群数量成正比的。当 $k > E$ 时，(1.27) 的相线结构和 (1.25) 一样，而 $k < E$ 时，种群总会最终灭绝。

另一常见模型是具有 **Allee 效应** 的种群模型：

$$y' = ky(1 - \frac{y}{N})(\frac{y}{M} - 1), \quad (1.28)$$

这里 $0 < M < N$ 。我们仍然称 N 为承载能力，而 M 称为稀疏常数 (sparsity constant)。(1.28) 具有两个稳定平衡解 $y(t) = 0$ 和 $y(t) = N$ ，而 $y(t) = M$ 是不稳定的，这是具有双稳定性 (bistability) 最简单的模型。



图 1.10 单稳和双稳系统, (左): 单稳 (右): 双稳

捕食者和被捕食者的种群大小始终是生物学家关心的问题。方程 (1.26) 和 (1.27) 是这类模型的两个可能形式。若假设捕食者的数量是一个常数 $r > 0$ ，那么被捕食者的数量满足：

$$y' = g(y) - rc(y), \quad (1.29)$$

这里 $g(y)$ 是在捕食者为零时的增长率，而 $c(y)$ 是每个捕食者的单位捕食量。 $g(y)$ 的两个例子即是 (a) Logistic 增长，或 (b) Allee 效应增长。而 $c(y)$ 可以采用加拿大生态学家 **Holling** 的捕食者回应函数 (predator functional response) 的概念。(1.26) 和 (1.27) 中的回应函数是常数函数 $c(y) = h$ 和线性函数 $c(y) = Ey$ 。Holling 提出三种更合理的回应函数：

(类型I)

$$c(y) = \begin{cases} Ey, & 0 < y \leq y_*, \\ Ey_*, & y \geq y_*, \end{cases} \quad (1.30)$$

(类型II)

$$c(y) = \frac{Ay}{B+y}, \quad y > 0, \quad (1.31)$$

(类型III)

$$c(y) = \frac{Ay^p}{B^p + y^p}, \quad y > 0, p > 1, \quad (1.32)$$

这里 A, B 为正常数。这三类回应函数的共同性质是:

(C1) $c(0) = 0$; $c(y)$ 是递增函数,

(C2) $\lim_{y \rightarrow \infty} c(y) = c_\infty > 0$.

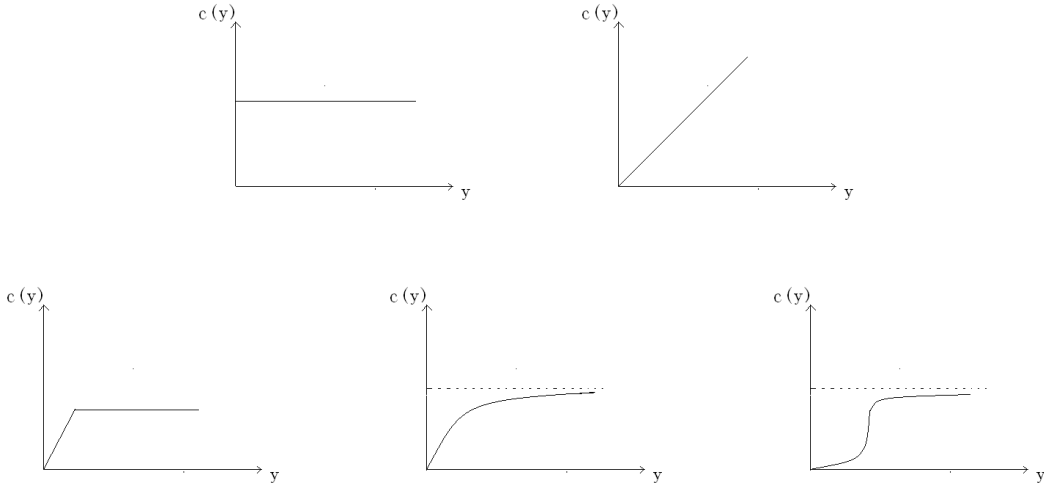


图 1.11 捕食者回应函数 (上左): 常数捕食率; (上右): 常数单位捕食率; (下左): Holling 类型 I; (下中): Holling 类型 II; (下右): Holling 类型 III.

一种和 Holling 类型 II 类似的回应函数是 Ivlev 类型:

$$c(y) = A - Be^{-ry}. \quad (1.33)$$

但是 Ivlev 类型与 Holling 类型 II 图像的几何性质几乎相同, 虽然导出的机理不同, 但是对于模型的数学性质, 重要的是回应函数的几何性质, 不是代数形式。因此, 若 $c(y)$ 满足 (C1), (C2) 和

(C3) $c'(0) > 0$, 且 $c''(y) \leq 0$ 在 $y \geq 0$ 时几乎处处成立,

则我们可以称 $c(y)$ 是广义的 Holling 类型 II; 而若 $c(y)$ 满足 (C1), (C2) 和

(C4) $c'(0) = 0$, 且存在 y_* 使得 $c''(y)(y - y_*) \leq 0$ 在 $y \geq 0$ 时几乎处处成立,

我们称 $c(y)$ 是广义的 Holling 类型 III。

在这一定义下, Holling 类型 I, II 和 Ivlev 同属广义的 Holling 类型 II。方程 (1.29) 在 (Noy-Meir, 1975; Ludwig et.al. 1978; May, 1977) 中被作为一种基本生态模型介绍。在 (Noy-Meir, 1975) 中, $y(t)$ 是一种植物的数量, 而 r 是某草食动物的数量; 在 (Ludwig et.al. 1978) 中, $y(t)$ 是一种森林害虫 (spruce budworm) 的数量。

我们用 1.2 节中的分歧理论对 (1.29) 作简单分析。假设 $g(y)$ 满足一种广义的 Logistic 增长, 即 $g(y) = rf(y)$, $f(y)$ 满足 $f(0) > 0$, 在 $(0, N)$ 上 $f(y)$ 单调递减, $f(N) = 0$ 。(我们不考虑 $y(t) > N$ 的可能性)。若 $c(y)$ 是广义的 Holling 类型 II 回应函数, 我们以 r 为分歧参数, 则分歧图可以用 $r = \frac{g(y)}{c(y)}$ 来表示。典型的分歧图如下:

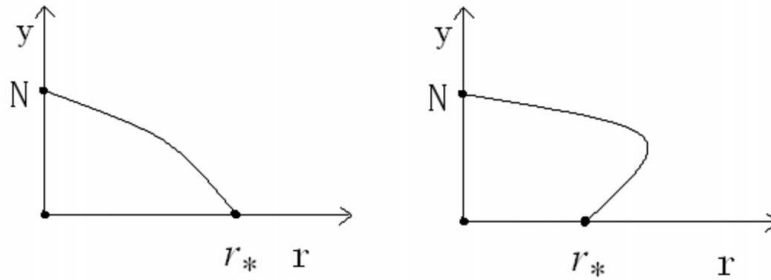


图 1.12 典型的分歧图: $g(y)$ 满足广义 Logistic 增长率, $c(y)$ 是广义 Holling 类型 II。这里 $r_* = f'(0)/c'(0)$ 是 $y = 0$ 上的跨越分歧点。而 $y = 0$ 总是一个平衡解。

可以注意到在图 1.12- 右中, 双稳定性有可能发生。下面再考虑 $c(y)$ 是广义的 Holling 类型 III 回应函数, 那么典型分歧图为图 1.13。

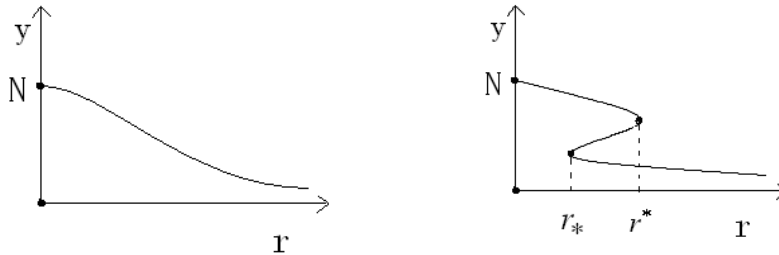


图 1.13 (1.29) 典型分歧图: $g(y)$ 满足广义 Logistic 增长率, $c(y)$ 是广义 Holling 类型 III。

在图 1.13 中, 由于 $c'(0) = 0$, 所以 $y = 0$ 总是一个不稳定的平衡解, 而对于某些这样的 $g(y)$, $c(y)$, 双稳定性仍旧可以出现 (如图 1.13- 右) 系统会有两个鞍结分歧点。在 Noy-Meir, May 等人的论文中, 图 1.13- 右有以下解释:

开始草食动物较少 (r 比较少), 那么 (1.29) 唯一稳定平衡点略小于承载能力 N ; 由于植物数量充分多, 草食动物增多 (r 增加), 则植物数量开始减少, 另一稳定解出现, 但植物数量仍然保持在大的稳定平衡解水平; 但是 r 进一步增大, 超过了右边的鞍结分歧点 $r = r^*$, 因为大的稳定平衡解随分歧消失,

植物数量骤然降至小的稳定平衡解；植物数量的急剧下降使得赖以生存的草食动物也发生食物危机，这时 r 可以下降。然而 r 的微小下降不足以使草食动物数量脱离小稳定平衡解的吸引域，所以在长时间内植物只能保持在低数量水平，直至草食动物 r 的数量降至小于另一分歧点 $r = r_*$ 。从而又一个这样的循环过程从头开始。这一周而复始的过程被用来解释在某些生态系统中一些动物植物的周期变化，被称为 **Hysteresis**。我们在后面会用两变元微分方程更精确地解释 **Hysteresis** 的周期现象。

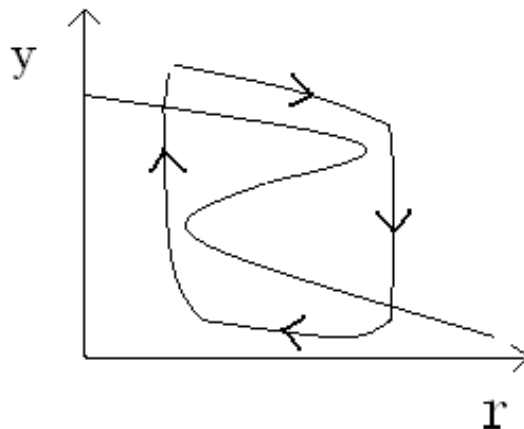


图 1.14 Hysteresis 现象示意图

(1.29) 也具有一个尖点分歧结构 (图 ??). 很多时候 **Hysteresis** 的分歧图是由单调的分歧图通过尖点分歧产生的.

Hysteresis 现象在数学上表现为随着鞍结点分歧的发生，系统状态由一个稳定平衡态跳跃到另一稳定平衡态的过程，而这跳跃是不可逆转的；另一表现出这一现象的生物模型为

$$y' = a - by + \frac{ry^p}{h^p + y^p}, \quad a, b, r, h > 0. \quad (1.34)$$

若固定某些 $a, b, h > 0$ ，以 r 为分歧参数，那么 (1.34) 的分歧图也会出现 **Hysteresis** 的状态突变。(1.34) 在 (Carpenter et.al.1999, Scheffer et.al. 2001) 等中提出， $y(t)$ 可以是一个湖泊中水藻吸取营养物的数量， a 是营养物增加率， b 是营养物被吸收率， r 是营养内部循环率。

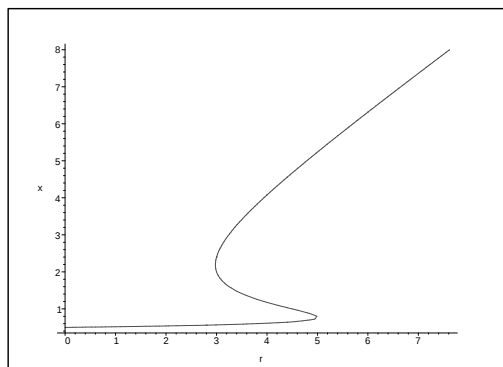


图 1.15 (1.34) 的分歧图，这里 $a = 0.5$, $b = 1$ 。

生物学中单变元模型举不胜举。我们强调一个观点，即模型中非线性项的代数形式并不重要，而非线性项的单调性、凸凹性就可以决定非线性函数的本质性质。基于这一思想，我们考虑一般形式的模型(1.24)。我们做以下定义：

- (1) 若 $f(y)$ 在 $[0, \infty)$ 上是递减的，称 (1.24) 为 **Logistic 型**；
- (2) 若 $f(y)$ 在 $[0, \infty)$ 上是先增后减的，称 (1.24) 为 **Allee 效应型**；
- (3) 若 $f(y)$ 在 $[0, \infty)$ 上是递减再递增最后递减的，称 (1.24) 为 **Hysteresis 型**。

这一定义只基于单位增长率 $f(y)$ 的单调性，而并非 $f(y)$ 零点的个数。我们一般假设存在 N 使得当 $y > N$ 时， $f(y) < 0$ 。对于 **Allee 效应型**或者 **Hysteresis 型**， $f(y)$ 可能会有多个零点。所以我们定义 (1.24) 为强 **Allee 效应型**或者 **Hysteresis 型**，若前面的定义满足，且 $\{y > 0 : f(y) < 0\}$ 有两个连通分之。否则我们称之为弱 **Allee 效应型**或者 **Hysteresis 型** (图 1.16)。对于 (1.24)，弱 **Allee 效应型**或者 **Hysteresis 型**和 **Logistic 型**没有本质区别，但我们会在后面反应扩散方程时再考虑这些非线性方程。

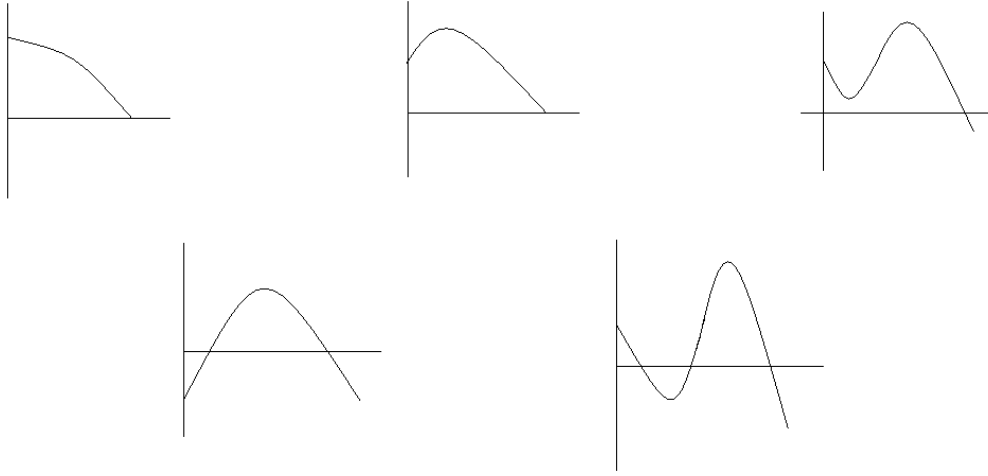


图 1.16 单位增长率 $f(y)$ 的分类 (上左):Logistic 型; (上中): 弱 Allee 效应型; (上右): 强 hysteresis 型;(下左): 强 Allee 效应型; (下右): 强 hysteresis 型

§1.5 生物数学中单变元差分方程的模型

很多生物学家更习惯于用离散的差分方程来描述生物种群个数的增长变化规律。许多差分方程与相应的微分方程类似，如 (离散) **Malthus 模型**：

$$y_{n+1} = y_n + by_n - dy_n = (1 + b - d)y_n = \lambda y_n, \quad (1.35)$$

这里 b 是单位出生率， d 是单位死亡率， λ 是单位生存率 (per capita survival rate)。 (1.35) 的解是 $y_{n+1} = y_0 \lambda^n$ 。所以当 $\lambda > 1$ 时种群个数满足指数增长，当 $0 < \lambda < 1$ 时为指数衰减。

非线性模型形为

$$y_{n+1} = y_n S(y_n), \quad (1.36)$$

$S(y)$ 是非线性单位生存率。生物学家在比较数据和模型提出了各种可能的 $S(y)$ 。如在 (Bellows,1981) 中提出的 **Bellows** 模型:

$$y_{n+1} = \frac{\lambda y_n}{1 + (ay_n)^b}, \quad a > 0, b \geq 1, \lambda > 0. \quad (1.37)$$

和 (Hassell,1981) 中提出的 **Hassell** 模型

$$y_{n+1} = \frac{\lambda y_n}{(1 + ay_n)^b}, \quad a > 0, b > 0, \lambda > 0. \quad (1.38)$$

(Ricker,1954) 中提出的 **Ricker** 模型:

$$y_{n+1} = by_n e^{-y_n}, \quad (1.39)$$

(Beverton-Holt,1957) 中提出的 **Beverton – Holt** 模型:

$$y_{n+1} = \frac{ry_n}{1 + y_n}. \quad (1.40)$$

而我们在例 1.5 中考虑的 **Logistic** 差分方程是 (May,1977) 中提出的, 这也是混沌概念第一次被提出。

我们也可以将 $S(y)$ 做一个分类:

- (1) 若 $S(y)$ 是单调递减的, 称为 **Compensatory** 型;
- (2) 若 $S(y)$ 是先单调递增后单调递减的, 称为 **Allee** 效应型;

在 **Compensatory** 型中, 再考虑 $F(y) = yS(y)$, 那么

- (1a) 若 $F(y)$ 是单调递减的, $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 0$, 称为 **under – compensatory** 型;
- (1b) 若 $F(y)$ 是先单调递增后单调递减的, $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 0$, 称为 **over – compensatory** 型;
- (1c) 若 $F(y)$ 是单调递增的, $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = C > 0$, 称为 **exact – compensatory** 型。(图 1.17)

例如在 Bellows 模型 (1.37) 中, 当 $0 < b < 1$ 时为 under-compensatory 型; 当 $b > 1$ 时为 over-compensatory 型; 而 $b = 1$ 时为 exact-compensatory 型。

对于单增的 $F(y)$, 我们有以下定理:

定理1.4. 若 $F(y) = yS(y)$ 是单调递增函数, 那么 (1.36) 的任何解数列 $\{y_n\}$ 必为单调递增或单调递减的。因此收敛到一个不动点或发散到 $\pm\infty$ 。

我们注意到 $F(y) = \lambda y(1 - y)$ (Logistic), $F(y) = bye^{-y}$ (Ricker), $F(y) = \frac{\lambda y}{1 + y^b}$ ($b > 1$) 都属于 over-compensatory 型。利用 1.3 节中数值模拟分析方法, 可以得到同样的从稳定不动点, 到周期倍增分歧, 直至混沌的分歧图。

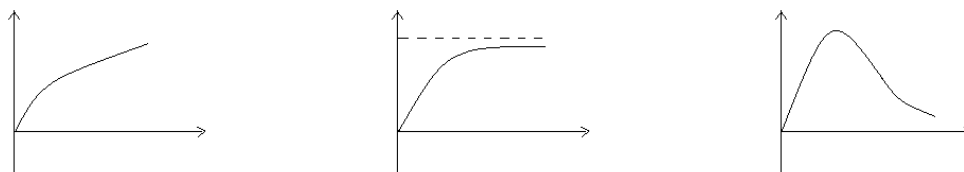


图 1.17 生存函数 $F(y)$. (左):under-compensatory 型; (中):exact-compensatory 型; (右):over-compensatory 型.

§1.6 第一章练习题

1. 画出 $y' = \frac{(y+2)(y-5)}{y-4}$ 的相线, 并决定 $y(0) = 0, y(0) = 3.5$ 的解的渐近行为。
2. 找出 $y' = \frac{y^3}{y-1}, y(0) = 2$ 的解的最大存在区间。
3. 找出 $y' = y(1-y) - \frac{y}{3y+a(1-y)}$ 的分歧点, 画出分歧图。
4. 找出 $y' = y(1-y)^2 + k$ 的分歧点, 画出分歧图。
5. 找出 $y' = y(1 - \frac{y}{50}) - \frac{ay}{5+y}$ 的分歧点, 画出分歧图。
6. 在 Beverton-Holt 模型 $y_{n+1} = \frac{ry_n}{1+y_n}$ 中, 令 $x_n = 1/y_n$, 则 x_n 满足一个线性差分方程。试通过解这个线性方程得到 Beverton-Holt 模型显式解。
7. 考虑 Bellows 模型 $y_{n+1} = \frac{\lambda y_n}{1+y_n^b}$ ($b > 2$),
 - a) 试求出基本分歧点 (非平凡不动点), 并决定分歧类型。
 - b) 用 Matlab 画出不同 λ 值的典型解轨道, 并画出分歧图。
8. 证明定理 1.4。
9. 考虑一般收获模型 (1.29)

$$y' = g(y) - rc(y),$$

这里 $g(y)$ 满足广义的 Logistic 增长, $c(y)$ 满足广义的 Holling 类型 II 条件 (C1), (C2), (C3)。讨论 (1.29) 的分歧图在什么条件下为图 1.12 中的两种图。若需要其他 $g(y), c(y)$ 的条件, 明确需要什么样的条件。

第二章 多变元模型

§2.1 一阶线性平面系统

线性微分方程组

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

具有两个变量 $x(t)$, $y(t)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 方程可以写成如下矩阵-向量形式:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

或

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y, \quad Y(0) = Y_0, \quad (2.1)$$

在这里, $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. (2.1) 具有指数形式的解 $Y(t) = e^{\lambda t} V$, 将此形式代入 (2.1) 我们得到 $AV = \lambda V$, 即 (λ, V) 应为矩阵 A 的特征值, 特征向量. 由此 (及进一步的线性代数知识) 得到特征方程:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0, \quad (2.2)$$

这里 $T = a + d$ 是 A 的迹 (trace), $D = ad - bc$ 是 A 的行列式 (determinant), 所以 (2.2) 变为:

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0. \quad (2.3)$$

依赖于 A 的特征值, (2.1) 解的一般形式为:

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 $Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$;

(b) $\lambda_1 = \lambda_2$, 则 $Y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} (V_1 t + V_2)$, 这里 V_1, V_2 满足 $AV_1 - \lambda_1 V_1 = 0$, $AV_2 - \lambda_2 V_2 = V_1$.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 的情况包括 $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$ 的可能性. 相对于解的代数形式, 我们更关心解的定性分析. 一阶二元方程组的解有几种表示方式. 首先是解的图像 (solution curve), 即 t - xy 平面上的图像 $(t, x(t))$, $(t, y(t))$.

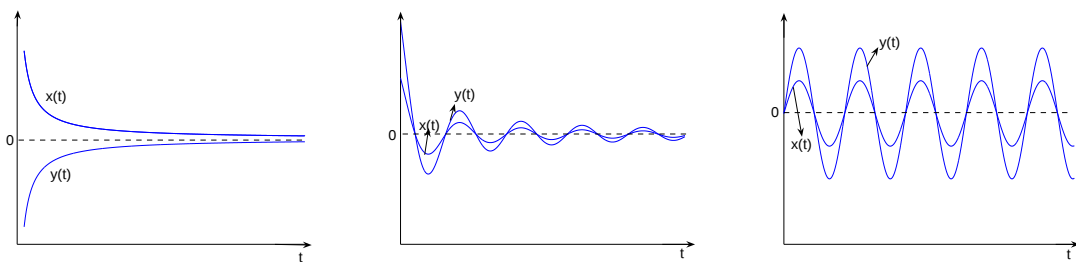


图 2.1 一阶二元线性方程组解的图像。(左): 单调收敛于平衡解; (中): 振荡收敛于平衡解; (右): 周期解。

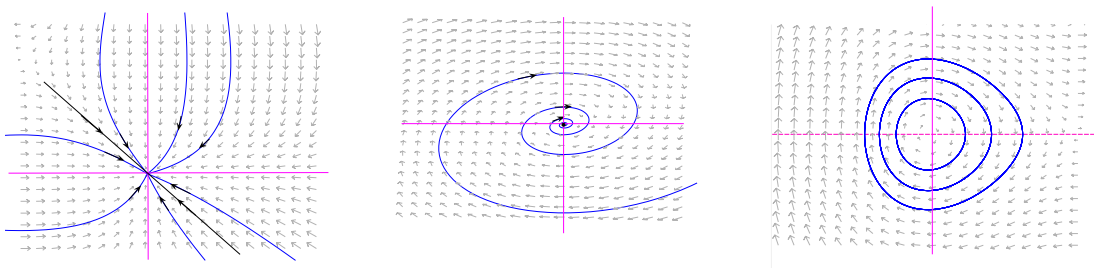


图 2.2 一阶二元线性方程组解的相图。(左): 单调收敛于平衡解; (中): 振荡收敛于平衡解; (右): 周期解。

另外把 $(x(t), y(t))$ 看成 $x-y$ 平面上一个移动粒子的轨道, 那么 $x-y$ 平面上所有轨道的集合构成方程组的**相图 (phase portrait)**, $x-y$ 平面称为**相平面 (phase plane)**. 解的图像, 相图的概念适用于线性或非线性的自治系统及高维方程组, 而高维的**相空间 (phase space)**是轨道所在空间。

相图的几何结构依照矩阵 A 的特征方程 (2.3) 来决定。一般可以用 (T, D) 的值来决定相图: 因为 $\lambda_1 + \lambda_2 = T$, $\lambda_1 \lambda_2 = D$, 容易得到

- (A) $T > 0, D > 0, T^2 - 4D > 0$, 则 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$;
- (B) $T < 0, D > 0, T^2 - 4D > 0$, 则 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
- (C) $D < 0$, 则 $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;
- (D) $T > 0, D > 0, T^2 - 4D < 0$, 则 $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$;
- (E) $T < 0, D > 0, T^2 - 4D < 0$, 则 $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$.

这一分类可以方便地用**T-D 平面图 (Trace-Determinant plane)**来表示。

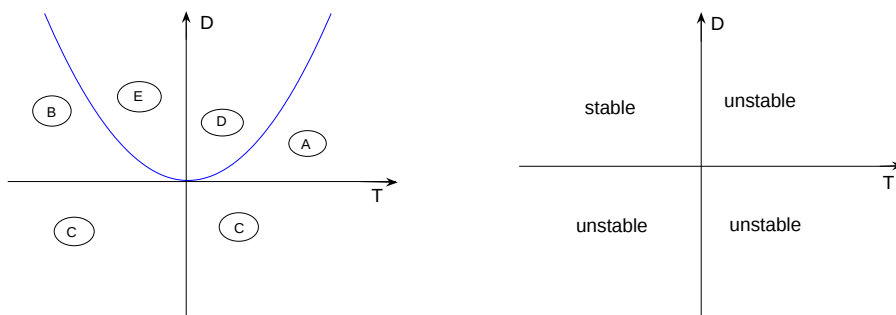


图 2.3 迹 - 行列式平面。

前面所列五类特征根分布在 $T-D$ 平面上都代表一个开子集。这些开子集中间的边界为 $T = 0$ (A 与 C, B 与 C 之间), $D = 0$ (D 与 E 之间), 和 $T^2 - 4D = 0$ (B 与 E, A 与 D 之间)。这些边界线上代表的 (T, D) 所对应相图与 (A)-(E) 所表示的不同, 但是这些边界线在 $T-D$ 平面上是零测度集合, 因此可以认为 (A)-(E) 代表了大多数相图。我们指出在 $T = 0$ 时, (2.1) 有一条直线 $ax + by = 0$ 的平衡点, 而其他

情况下 $(0,0)$ 是 (2.1) 唯一平衡点。当 $D = 0, T > 0$ 时, (2.1) 的相图有无穷多个同心椭圆周期轨道围绕原点 (其他情况下 (2.1) 没有非平凡周期解)。当 $T^2 - 4D = 0$ 时, (2.1) 的轨道介于单调与振荡型之间。而五类广泛出现的相图 (A)-(E) 见下图:

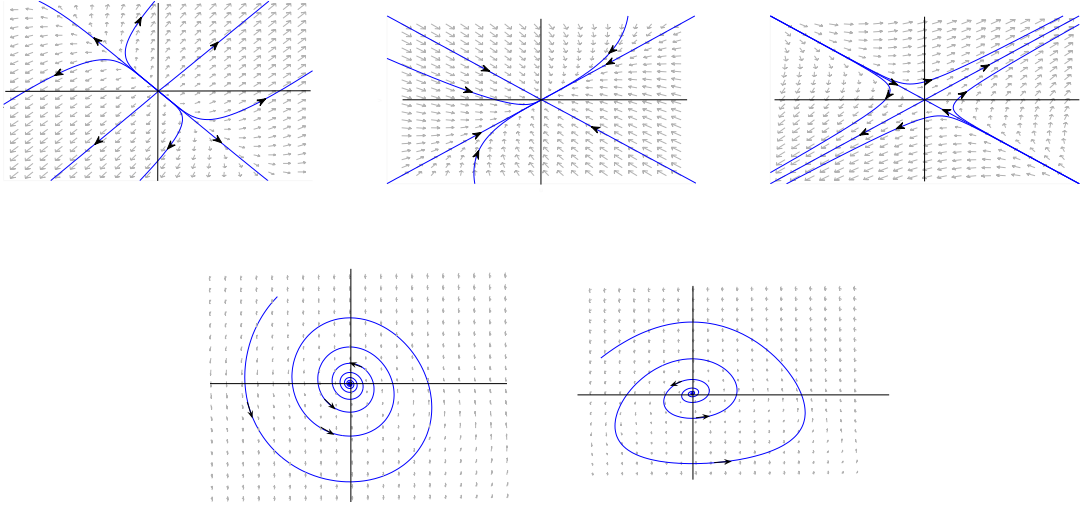


图 2.4 (2.1) 典型相图。(上左): $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ 不稳定结点 (source 或 unstable node), (上中): $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ 稳定结点 (sink 或 stable node), (上右): $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ 鞍点 (saddle); (下左): $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$ 稳定螺旋 (spiral sink 或 stable spiral), (下右): $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$ 不稳定螺旋 (spiral source 或 unstable spiral)

在五类典型相图中, 在稳定结点和稳定螺旋中, 我们称原点 $(0,0)$ 为**稳定 (stable)**平衡点, 其他三类是**不稳定 (unstable)**平衡点。因此, 一个平衡点稳定的条件是:

$$T < 0, D > 0, \quad (2.4)$$

而不稳定的条件是

$$T > 0, D > 0 \text{ 或 } D < 0. \quad (2.5)$$

后面我们会看到稳定与不稳定之间的分界线恰是分歧发生的地方。

§2.2 一阶非线性平面系统

非线性平面系统的形式为:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y). \end{cases} \quad (2.6)$$

我们一般假设**向量场 (vector field)** $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ 是 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的连续可微函数, 那么对于任何 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, (2.6) 有唯一满足 $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ 的解。

一个平衡解 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ 满足 $f(x_0, y_0) = 0$ 和 $g(x_0, y_0) = 0$. (2.6) 在 (x_0, y_0) 的线性化方程为:

$$\frac{dY}{dt} = J \cdot Y, \quad (2.7)$$

这里 J 是 Jacobian 矩阵,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

若存在 (x_0, y_0) 的一个邻域 U 使得对任何 $(x, y) \in U$, 以 (x, y) 为初值的 (2.7) 的解 $(x(t), y(t))$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$, 则称平衡点 (x_0, y_0) 是稳定的, 否则称 (x_0, y_0) 是不稳定的。应该注意, 我们这里为方便起见用以上的稳定性定义, 在一般的文献中称以上的定义为**渐近稳定** (asymptotically stable). 那么类似于一元方程的情况, 我们有以下线性稳定性定理:

定理2.1. 若 $F = (f, g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是连续可微的, (x_0, y_0) 是一个平衡点, T, D 是 Jacobian 矩阵 $J(x_0, y_0)$ 的迹和行列式。

- (a) 若 $T < 0$, 及 $D > 0$, 则 (x_0, y_0) 是一个稳定平衡点;
- (b) 若 $T < 0$, $D > 0$ 或 $D < 0$, 则 (x_0, y_0) 是一个不稳定平衡点;
- (c) 若 T, D 满足其他条件, 稳定性无法由 J 决定。

例2.1. 考虑如下系统:

$$\begin{cases} x' = 2x(1 - \frac{x}{2}) - xy \\ y' = 3y(1 - \frac{y}{3}) - 2xy \end{cases}. \quad (2.8)$$

(2.8) 的平衡点满足方程:

$$\begin{cases} 2x(1 - \frac{x}{2}) - xy = 0 \\ 3y(1 - \frac{y}{3}) - 2xy = 0 \end{cases}.$$

可以解得共四个平衡点 $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$. 由定理 2.1 及 Jacobian 矩阵计算可得: $(0, 0)$ 是不稳定结点, $(1, 1)$ 是 (不稳定) 鞍点, 而 $(2, 0)$, $(0, 3)$ 都是稳定结点。

平衡点及其线性化给出了平衡点附近相图结构, 为了考虑不靠近平衡点的点的动力行为, 我们定义 (2.7) 的**nullcline (isocline)**为 $N_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ (x-nullcline), $N_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ (y-nullcline). 一般 N_x 和 N_y 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的曲线 (即 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 的**零水平线**). 容易看出 $N_x \cap N_y$ 即为 (2.7) 的平衡点集合。向量 (f, g) 在 $\mathbb{R}^2$ 上可以用带方向的线段表示, 那么向量场 (f, g) 可以用 $\mathbb{R}^2$ 上许多这样的向量表示。Nullcline 的几何意义为: N_x 恰为 $\mathbb{R}^2$ 上所有使得向量 (f, g) 为垂直方向的 ($\uparrow$ 或 $\downarrow$), N_y 恰为 $\mathbb{R}^2$ 上所有使得向量 (f, g) 为水平方向的 ($\leftarrow$ 或 $\rightarrow$), 而 $N_x \cup N_y$ 将 $\mathbb{R}^2$ 切割成若干连通开子集, f 和 g 在每个连通的开子集中符号式不变的。 N_x 或 N_y 也由平衡点分割成一些连通的曲线段。在 N_x 的连通曲线段上, 可以用一个带箭头的线段表示向量场方向: $\uparrow$ (北), $\downarrow$ (南), 在 N_y 上为 $\leftarrow$ (西), $\rightarrow$ (东)。而 $\mathbb{R}^2$ 上有 $N_x \cup N_y$ 分割成的开子集内部, 也可以由一个带箭头线段表示 (f, g) 方向: $\nwarrow$ (西北), $\nearrow$ (东北), $\swarrow$ (西南) 或 $\searrow$ (东南)。例 2.1 中的方程的向量表示见下图 (这里我们仅考虑 $x \geq 0, y \geq 0$)。

向量指示图类似第一章中的相线。在一些情况下, 这已经足以决定相图的精确结构。例如在 (2.8) 的向量指示图中, Nullclines 为 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ 和 $2x + y = 3$ 。它们将第一象限划成 A, B, C, D 四个连通子集。若初值 $(x_0, y_0) \in C$, 必有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 3)$; 而 $(x_0, y_0) \in B$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (2, 0)$; 若 $(x_0, y_0) \in A$, 则有三种可能:

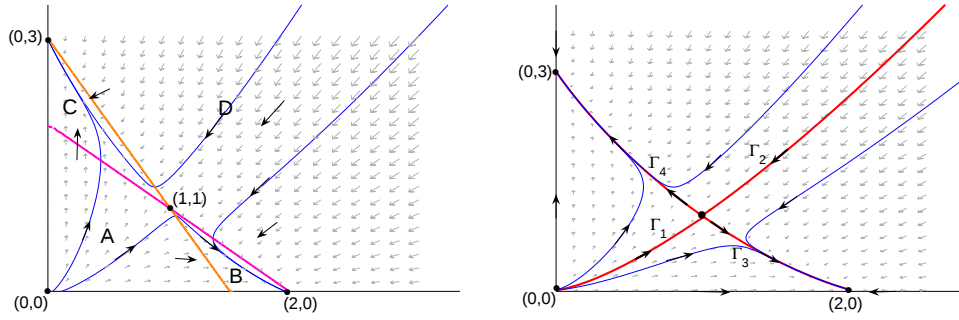


图 2.5 (左): (2.8) 的 Nullcline, 平衡点及向量方向指示. (右): (2.8) 的不变流形, 平衡点示意图

- (A1) $(x(t), y(t))$ 进入 B ;
- (A2) $(x(t), y(t))$ 进入 C ;
- (A3) $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (1, 1)$.

而从 A 始发轨道都满足 $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$. 结合定理 2.1, 我们知道满足 (A3) 的轨道只有一条. 而从鞍点 $(1, 1)$ “出发” (即 $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (1, 1)$) 的轨道也只有相对的两条. 一般来说满足 (A3) 的轨道为 $(1, 1)$ 的稳定轨道 (Stable orbit), 而从 $(1, 1)$ “出发”的为 $(1, 1)$ 的不稳定轨道 (Unstable orbit). 它们也成为稳定流形 (Stable manifold) 或不稳定流形 (Unstable manifold). 严格来说, 鞍点附近向量场和方程轨道的结构需要用 Hartman-Grobman 定理和不变流形 (Invariant Manifold) 定理来证明, 这是动力系统的两大重要且深刻的定理, 我们这里不在赘述. 对从区域 D 出发的轨道可做类似的分析, 结合稳定/不稳定流形的结构, 我们得到另一相图的示意图 (见图 2.5 右). 在这个示意图中, 连接各个平衡点的轨道尤为重要. 一般满足

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (x_1, y_1), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_2, y_2)$$

的轨道称为连接平衡点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的异宿轨道 (heteroclinic orbit) 若 $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, 或称为同宿轨道 (homoclinic orbit) 若 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. 同宿/异宿轨道统称为连接轨道 (connecting orbits). 在 (2.8) 中除 $(2, 0)$ 和 $(0, 3)$ 之间外, 其他每对平衡点上都是一条异宿轨道相连接.

这些异宿轨道还可称为分离轨道 (separatrix, 复数 separatrice), 因为若 (x_0, y_0) 在 $\Gamma_1((0, 0) \rightarrow (1, 1))$ 与 $\Gamma_2(\infty \rightarrow (1, 1))$ (即 $(1, 1)$ 的稳定流形) 上方, 一定有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (0, 3)$, 而在 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 下方, $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (2, 0)$. 对任何稳定平衡点 (x_1, y_1) 我们定义

$$B((x_1, y_1)) = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2 : \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_1, y_1)\}.$$

为 (x_1, y_1) 的吸引盆地 (basin of attraction), 则 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 恰好是 $(2, 0)$ 和 $(0, 3)$ 的分离曲线, 这是为什么我们称之为分离轨道. (2.8) 是一个具有双稳性 (bistability) 的系统, 类似于一元方程 (1.28). $\Gamma_3((1, 1) \rightarrow (2, 0))$ 与 $\Gamma_4((1, 1) \rightarrow (0, 3))$ 也可称为分离轨道, 因为若 (x_0, y_0) 在 $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$ 上方, $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = \infty$, 若 (x_0, y_0) 在 $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$ 下方, $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$. 一般鞍点的稳定/不稳定流形统称为分离轨道. 这样我

们对例 2.1 中的方程 (2.8) 已经做了详尽的定性分析。这些分析对一般二元方程组 (2.7) 都可以进行, 称之为相图分析 (phase plane analysis). 一般它包括

- (1) Nullcline 及向量场方向分析;
- (2) 平衡点, Jacobian 矩阵, 稳定性分析;
- (3) 鞍点分离轨道, 同宿/异宿轨道分析;
- (4) 周期轨道分析.

(2.7) 的周期轨道是指存在 $T > 0$ 使得 $(x(t), y(t))$ 满足 $x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(t), \forall t \in \mathbb{R}$. 在 (2.8) 的分析中我们仅进行了 (1)-(3), 但是我们可以用向量场方向分析排除在 $\mathbb{R}_+^2$ 的周期轨道的存在性。在 2.5 节中我们将介绍 (2.7) 周期轨道的分析方法。

§2.3 生物数学中常见二元常微分方程组模型

最早的模型始于美国化学家 Lotka (Lotka, 1920) 和意大利数学家 Volterra (Volterra, 1925) 的模型

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \quad (2.9)$$

这里 $a, b, c, d > 0$. 这是最简单的捕食模型 (predator-prey model), $x(t)$ 是被捕食者 (prey) 的数量, $y(t)$ 是捕食者 (predator) 的数量。在一些其他背景中, 捕食模型也称为消费者 - 资源模型 (consumer-resource model), 那么 $x(t)$ 是资源, $y(t)$ 是消费者。更一般的捕食模型是

$$\begin{cases} x' = xf(x) - h(x, y) \\ y' = yg(y) + r(x, y), \end{cases} \quad (2.10)$$

这里 f, g 分别是 x, y 的单位增长率, $h(x, y), r(x, y)$ 为 $\mathbb{R}_+^2$ 上的非负函数, 代表被捕食者受害和捕食者受益的程度。 f 和 g 可以取 1.4 节中的各类增长模式, 但若捕食者严重依赖于获取被捕食者而生存, 很多时候可取 $g(y) = -d$ 甚至 $g(y) = -d_1 - d_2y$, 而 h 和 r 的形式往往满足

$$h(x, y) = kr(x, y), \quad (2.11)$$

即被捕食者受害程度与捕食者受益程度成正比。假设 (2.11) 中 $h(x, y)$ 最常见形式为

$$h(x, y) = \phi(x)y, \quad (2.12)$$

这里 $\phi(x)$ 就是 1.4 节中介绍的捕食者回应函数 (predator functional response), 即捕食者对被捕食者数量作出反应, 来决定捕食的多少。那么 1.4 节中的回应函数都适用于这里, 在 (2.11), (2.12) 假设下的捕食模型为

$$\begin{cases} x' = xf(x) - \phi(x)y \\ y' = yg(y) + k\phi(x)y. \end{cases} \quad (2.13)$$

在文献中 (2.13) 经常被称为 Rosenzweig-MacArthur 捕食模型, (Rosenzweig-MacArthur, 1963), 在二十世纪 70 年代, Rosenzweig, May 等生物学家在《科学》(Science) 上的几篇论文讨论了 (2.13) 的生物意义, 许

多数学家在 70-80 年代的工作使 (2.13) 的数学理论严格化且更加完善。我们将在 2.5 节对 (2.13) 做详尽分析。在这些工作中, (2.13) 形为

$$\begin{cases} x' = ax(1 - \frac{x}{N} - \phi(x)y) \\ y' = -dy + k\phi(x)y, \end{cases} \quad (2.14)$$

其中 $a, d, N, k > 0$, 而 $\phi(x)$ 是 1.4 节中广义 Holling 类型 II 函数。最后我们指出在 (2.13) 或 (2.14) 的方程中, 令 y 为常数, 即得到一元捕食模型 (1.29)。由于捕食者一般生命周期长, 个体数量变化远慢于小型捕食者的变化, 因此在短的时间区间上, 可以认为 $y(t)$ 是常数。在这一意义下 (1.29) 是 (2.13) 的一个良好逼近。

近年来除了形如 (2.13) 的捕食模型, (Beddington, 1975) 和 (DeAngelis, 1975) 考虑了如下 Beddington-DeAngelis 模型

$$\begin{cases} x' = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{mxy}{a + by + cx} \\ y' = -\mu y + \frac{\epsilon mxy}{a + by + cx}. \end{cases} \quad (2.15)$$

在 (2.15) 中令 $a = 0$, 则方程变为

$$\begin{cases} x' = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{mx}{b + cx/y} \\ y' = -\mu y + \frac{\epsilon my}{by/x + c}. \end{cases} \quad (2.16)$$

这是一种依赖于捕食者 - 被捕食者数量比值的捕食模型 (ratio-dependent model)(Arditi-Ginzburg, 1989). 在捕食模型 (2.10) 中, 两个生物种群一个受害一个受益。若两个种群都在互动关系 (interaction) 中受害, 这样的模型称之为竞争模型 (**competition model**), 那么类似 (2.10), 我们可以把一般竞争模型写做

$$\begin{cases} x' = rf(x) - h(x, y) \\ y' = yg(y) - r(x, y). \end{cases} \quad (2.17)$$

可以看出 (2.8) 就是 (2.17) 的一个特例。两个不同种群之间的竞争是种群间竞争 (**interspecies competition**), 同种群内部不同个体的竞争为种群内竞争 (**intraspecies competition**). 一元 Logistic 方程可以看作种群内竞争的一个简单形式, 即个体数量增加不利于整个种群增长。若 (2.17) 中 f, g 为广义 Logistic 型, 那么 (2.17) 既考虑了种群间竞争, 又包括了种群内竞争。竞争模型在经济学 (两个商业竞争对手) 和军事学 (两支交战军队) 也广为应用。

若两个种群都在互动关系中受益, 即

$$\begin{cases} x' = rf(x) + h(x, y) \\ y' = yg(y) + r(x, y). \end{cases} \quad (2.18)$$

这一类模型为互惠模型或合作模型 (cooperative model, mutualism model).

意大利数学家 Volterra 在 20 世纪 20-30 年代对这三类方程的特殊形式作了系统研究。他研究的方程可统一写成

$$\begin{cases} x' = x(a + bx + cy) \\ y' = y(d + ex + fy), \end{cases} \quad (2.19)$$

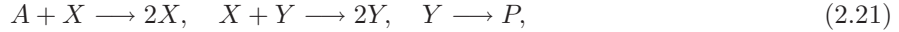
这里 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. 容易看出有参数值可将 (2.19) 划为以上所述三类方程, (2.19) 称为 Lotka-Volterra 方程组.

另一方程的一般形式是

$$\begin{cases} x' = rf(x, y) \\ y' = yg(x, y). \end{cases} \quad (2.20)$$

对于捕食模型, 我们假设 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) < 0$ 和 $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) > 0$. 这一形式称为 Kolmogorov 捕食模型.

下面我们转到化学反应类模型. Lotka 在 1920 年的论文中就以 (2.9) 描述了下面一个序列的化学反应



这里 A 代表被捕食者的养料, X 代表被捕食者, Y 代表捕食者, P 代表死亡了的捕食者. 假设 A 的数量为常数, 捕食者死亡率为常数就得到 (2.9). 这里一个基本假设就是化学反应



发生的可能性和 $[A]^m \cdot [B]^n$ 成正比, 这里 $[A], [B]$ 分别是化学物质 A, B 的数量或浓度. m, n 是正整数, 即 m 个 A 分子和 n 个 B 分子参加这一反应. $m + n$ 是这一反应的阶数 (order).

在生物化学中另一常见现象是自催化反应 (autocatalytic reaction). 催化剂是在化学反应前后数量不变的反应物, 而自催化剂是参加了由其他化学物产生其本身的化学物质. 忽略一些可以认为数量不发生变化的化学物质, 一个自催化化学反应可以写成



这里 $m, n, p \in \mathbb{N}$. 这一反应可表示为

$$\begin{cases} A' = -mk_1 A^m B^n, \\ B' = pk_1 A^m B^n. \end{cases} \quad (2.24)$$

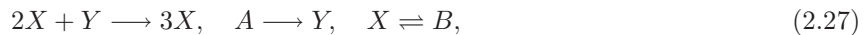
若 (2.23) 中的反应是可逆的, 即



则反应的模型为

$$\begin{cases} A' = -mk_1 A^m B^n + mk_2 B^{n+p}, \\ B' = pk_1 A^m B^n - pk_2 B^{n+p}. \end{cases} \quad (2.26)$$

基于以上所列基本原理, 一些化学反应的模型被建立. (Schnakenberg, 1979) 考虑自催化化学反应



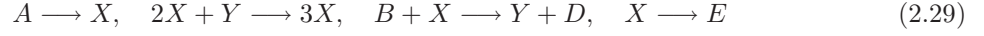
并假设 A 和 B 保持常量, 则

$$\begin{cases} x' = x^2 y - x + b, \\ y' = -x^2 y + a, \end{cases} \quad (2.28)$$

这里 $x = [X], y = [Y], a = [A], b = [B]$.

另两个类似模型是

(a) 化学家 Prigogine 为首的 Brussel 学派 (Prigogine, 1978) 用化学反应



导出的 Brusselator 模型

$$\begin{cases} x' = a + x^2y - (b+1)x, \\ y' = bx - x^2y, \end{cases} \quad (2.30)$$

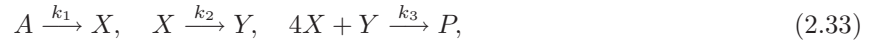
(b) 化学家 Gray 和 Scott (Gray-Scott, 1983, 1984) 考虑的化学反应



同时假设常数量 F 的 U 被加入反应, 而同数量的 U 和 V 被清除出反应器。这样就得到

$$\begin{cases} U' = -UV^2 + F(1 - U), \\ V' = UV^2 - (F + k)V. \end{cases} \quad (2.32)$$

在上面这些化学反应模型中, 反应率 (**reaction rate**) 一直被假设为与每一参加反应的反应物数量成正比, 因此我们得到的方程组中都是含有多项式非线性项。在某些条件下反应率可能随某些反应物数量发生其他变化。(Lengyel-Epstein, 1991) 考虑了 CIMA 化学反应



这里 k_1, k_2 为常数, 而 $k_3 = k_4/(k_5 + X^2)$, 因此我们有

$$\begin{cases} x' = k_1 - k_2x - \frac{4k_4xy}{k_5 + x^2}, \\ y' = k_2x - \frac{k_4xy}{k_5 + x^2}. \end{cases} \quad (2.34)$$

许多生物过程包括一种激活剂 (**activator**) 和一种抑制剂 (**inhibitor**)。 (Gierer-Meinhardt, 1972) 提出一种激活 - 抑制方程组 (**activator-inhibitor system**)

$$\begin{cases} a' = \rho a^2/h - \mu_a a + \rho_a, \\ h' = \rho a^2 - \mu_h h + \rho_h, \end{cases} \quad (2.35)$$

这里 $a(t)$ 是激活剂, $h(t)$ 是抑制剂, ρ_a, ρ_h 分别是两种化学物质产生率, 而 μ_a, μ_h 分别是两种化学物质单位衰减率, 激活剂以 a^2 项激发两种化学物质的产生, 而第一个方程中 h^{-1} 项代表了抑制作用。

我们以两个来自不同背景模型结束本节。英国生理学家 Hodgkin 和 Huxley 在 (Hodgkin-Huxley, 1952) 研究枪乌贼神经传导的过程中提出一个四变量非自治常微分方程组, 用来模拟神经传导中的动作电位 (**action potential**)。 (FitzHugh, 1961) 和 (Nagumo, et. al, 1962) 简化了 Hodgkin-Huxley 模型, 提出了 FitzHugh-Nagumo 模型

$$\begin{cases} V' = V - V^3/3 - W + I, \\ W' = a(V - bW + c), \end{cases} \quad (2.36)$$

其中 $V(t)$ 是细胞膜上的电位, $W(t)$ 是一个恢复变量, I 是电刺激的大小, a, b, c 是正参数。

最后我们回到生态学。(Klausmeier, 1999) 讨论了在干旱土地上植物生长的模型:

$$\begin{cases} w' = a - w - w n^2, \\ n' = w n^2 - m n. \end{cases} \quad (2.37)$$

这里 $w(t)$ 是水的数量, $n(t)$ 是植物数量, a 是降水量, m 是植物死亡率, $-w$ 项是水蒸发量, $-w n^2$ 项是水被植物吸取的量, $w n^2$ 是植物生长率。

应该指出我们的列出许多模型也考虑了空间变元, 我们在这里先忽略这一因素, 而注重模型中的物质间的反应与作用。

§2.4 方程的非量纲化 (nondimensionalization)

数学模型中的变量 (variable) 和参数 (parameter) 都具有一个量纲 (dimension), 即知识常量或变量的数量与基本物理量之间的关系。在国际单位制中有七个基本物理量: 长度 (L), 质量 (M), 时间 (T), 电流 (I), 热力学温度 (Q), 物质的量 (N) 和发光强度 (J). 在生物种群模型中, 生物个体的数目也可以看成一个基本物理量 (S). 那么一般模型中的常/变量的量纲都是这些基本物理量的导出量。

例2.2. 考虑 Lotka-Volterra 竞争模型

$$\begin{cases} x' = x(\lambda - ax - by), \\ y' = y(\mu - cx - dy). \end{cases} \quad (2.38)$$

则各变量和参数的量纲如下:

变量	量纲	参数	量纲
t	T	λ	T^{-1}
x	S_1	a	$T^{-1}S_1^{-1}$
y	S_2	b	$T^{-1}S_2^{-1}$
		μ	T^{-1}
		c	$T^{-1}S_1^{-1}$
		d	$T^{-1}S_2^{-1}$

我们看到变量一般具有基本物理量的量纲, 这里我们为以示 x 和 y 的区别, 所以区分 x 和 y 的量纲。而参数的量纲可由变量的量纲和微分方程来决定。基本原则为 (设 q 的量纲为 $\dim(q)$)

(a) 若 z 和 t 的量纲为 Z 和 T , 则 dz/dt 的量纲为 ZT^{-1} .

(b) 若 $A = B$, 则 $\dim(A) = \dim(B)$.

(c) 若 $A \pm B$ 出现在方程中, 则 $\dim(A) = \dim(B)$.

数量的量纲可被用来简化方程的结构, 减少参数的个数, 我们可以通过线性变换定义新变量, 要求新变量的量纲为 1, 即平凡量纲 (dimensionless). 我们以例 2.2 中的方程来演示这一过程 — 非量纲化 (nondimensionalization).

定义 $s = \lambda t, X = ax/\lambda, Y = dy/\lambda$, 则容易验证 (s, X, Y) 均为平凡量纲, 由微积分链式法则得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dX} \frac{dX}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\lambda}{a} \frac{dX}{ds} \lambda = \frac{\lambda}{a} X (\lambda - \lambda X - b \frac{\lambda}{d} Y)$$

得到

$$\frac{dX}{ds} = X(1 - X - \frac{b}{d} Y).$$

类似可得

$$\frac{dY}{ds} = Y(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{c}{a} X - Y).$$

令 $A = b/d, B = \mu/\lambda, C = c/a$, 则 (2.38) 转化为 (为方便起见, 我们仍使用 x, y 而非 X, Y)

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - Ay), \\ y' = y(B - Cx - y). \end{cases} \quad (2.39)$$

可以看到通过作了个非量纲化的线性变换, 原方程 (2.38) 中的 6 个参数减少到无量纲方程 (2.39) 的 3 个参数。而新参数是原参数的组合。新方程 (2.39) 有较少参数, 所以更容易作进一步分析。

这个例子中的方法可以用于所有应用中的模型。它的数学原理是量纲分析中的 Buckingham π -定理。这里我们不做严格的论述, 只大致叙述一下该定理的含义: 若一个数学模型早点方程中包含 n 个物理数量 (既可以是变量也可以常数参数), 而这 n 个数量都可以用 k 个独立的基本物理量表示, 那么原方程可通过线性变换转化为一组只包含 $n - k$ 个无量纲数量的新方程。Buckingham π -定理在理论上保证了这样的无量纲化的线性变换的存在性, 但是这样的无量纲化线性变换往往不是唯一的。研究者可以通过自己的需要, 选择恰当的线性变换来得到自己所需要的方程形式。

例2.3. 考虑 *Rosenzweig-MacArthur* 捕食模型

$$\begin{cases} x' = Ax(1 - \frac{x}{N}) - \frac{Bxy}{C + x}, \\ y' = -Dy + \frac{Exy}{C + x}. \end{cases} \quad (2.40)$$

那么方程中物理量的量纲如下表

变量	量纲	参数	量纲
t	T	A	T^{-1}
x	S_1	N	S_1
y	S_2	B	$S_1 S_2^{-1} T^{-1}$
		C	S_1
		D	T^{-1}
		E	T^{-1}

一种非量纲化变换为

$$s = Dt, \quad X = \frac{x}{N}, \quad Y = \frac{By}{NA},$$

则 (2.40) 可转化为

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = aX(1 - X) - \frac{aXY}{b + X}, \\ \frac{dY}{ds} = -Y + \frac{dXY}{b + X}, \end{cases} \quad (2.41)$$

这里 $a = A/D, b = C/N, d = E/D$. 我们也可以定义另一变换

$$s = At, \quad X = \frac{x}{C}, \quad Y = \frac{By}{CE},$$

则 (2.40) 被转化为

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = X(1 - \frac{X}{k}) - \frac{mXY}{1+X}, \\ \frac{dY}{ds} = -\theta Y + \frac{mXY}{1+X}, \end{cases} \quad (2.42)$$

其中 $k = N/C, m = E/A, \theta = D/A$. (2.41) 和 (2.42) 都是符合 Buckingham π -定理的无量纲方程, 但两者在消除参数的作用上各有侧重. (2.40) 中系统承载力 N 和捕食者死亡率 D 在 (2.41) 中消去, (2.40) 中 A 和 B 在 (2.41) 成为一致的 a . 而 (2.42) 将 (2.40) 中的捕食者单位增长率 A 和回应函数中的 C 消去, 同时把两个相互作用项的系数 B 和 E 统一为 m .

数学模型的非量纲化可以简化方程, 一般是对于一个复杂方程作定性定量分析的第一步.

§2.5 平面系统的分歧, 周期轨道分析

与单变元方程类似, 非线性二元方程组 (2.6) 中发分歧可以从平衡解的存在性和稳定性出发. 如果方程的代数结构不很复杂, 我们可以直接求出平衡解, 然后从解的形式来判断分歧的发生.

例2.4. 我们考虑非量纲化的 Lotka-Volterra 竞争模型 (2.38). 由 x -nullcline: $x = 0, 1 - x - Ay = 0$ 和 y -nullcline: $y = 0, B - Cx - y = 0$, 可以得到四个可能的平衡解: $(0, 0), (1, 0), (0, B), (\frac{1-AB}{1-AC}, \frac{B-C}{1-AC})$. 因为 x 和 y 是两个种群数量, 所以我们只考虑 $x \geq 0, y \geq 0$ 的情况. 那么第四个平衡解满足 $x \geq 0, y \geq 0$ 的可能性依赖于参数 A, B, C . 这里我们固定 A 和 C , 以 B 为分歧参数. 那么有以下两种情况分别讨论:

(a) $1 - AC < 0$, 即 $C > A^{-1}$. 从 (2.38) 中可以看到 A 和 C 分别是两个方程中竞争作用项 xy 的系数, 因此 $AC > 1$ 代表竞争强度较大. 我们称之为强竞争 (Strong Competition).

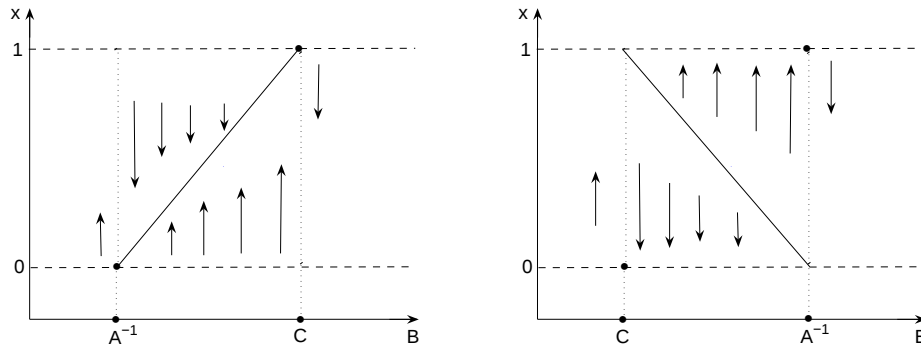


图 2.6 竞争模型 (2.38) 以 B 为参数的分歧图, (左): $AC > 1$, 强竞争, (右): $AC < 1$, 弱竞争.

那么我们可以用图 2.6- 左来说明共存解 $(\frac{1-AB}{1-AC}, \frac{B-C}{1-AC})$ 的分歧, 因为 $1 - AC < 0$ 及 $C > A^{-1}$, 则共存解只在 $A^{-1} < B < C$ 中存在, 而当 $B = A^{-1}$ 时共存解与 $(0, B)$ 重合, 而当 $B = C$ 时, 共存解与 $(1, 0)$ 重合, 这样我们得到图 2.6- 左的分歧图. 通过 Jacobian 矩阵计算可以算得 $(0, B)$ 在 $B < A^{-1}$ 时为不稳定, 在 $B > A^{-1}$ 时为稳定; 类似的 $(1, 0)$ 在 $B < C$ 时稳定, 在 $B > C$ 时不稳定, 而共存解在 $A^{-1} < B < C$ 是不稳定的. 实际上这正是例 2.1 中讨论的双稳定性结构.

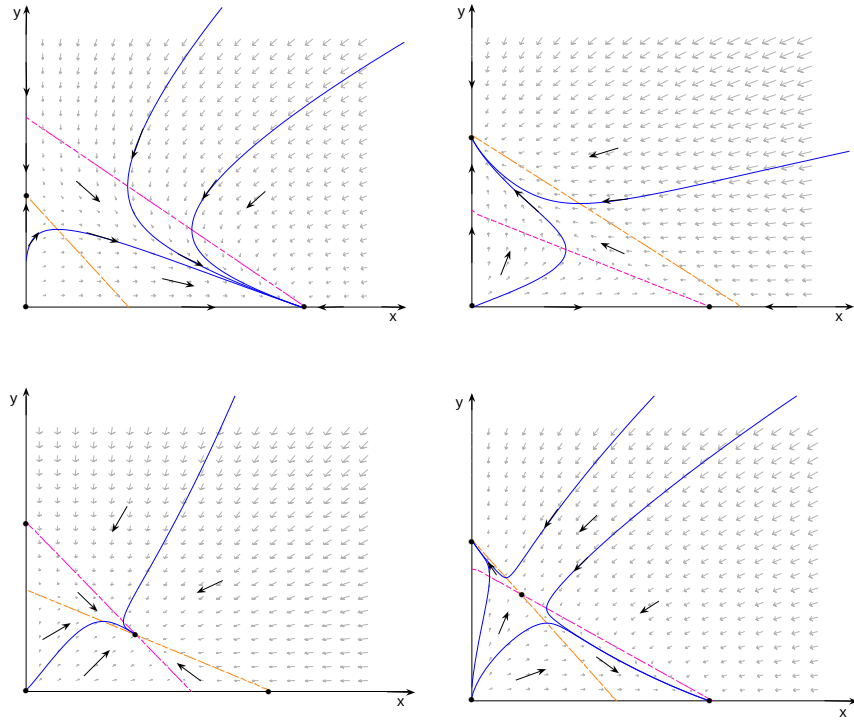


图 2.7 竞争模型 (2.38) 的相图。(左上): $B > \max\{C, A^{-1}\}$; (右上): $0 < B < \max\{C, A^{-1}\}$; (左下): $C < B < A^{-1}$; (右下): $A^{-1} < B < C$.

(b) $1 - AC > 0$, 即 $C < A^{-1}$, 这是**弱竞争 (Weak competition)**的情况。 $B = C$ 和 $B = A^{-1}$ 仍为共存解出现的分歧点, 但是共存解存在区间为 $A^{-1} > B > C$, 而且共存解是稳定的。在 $A^{-1} > B > C$ 时, 两个边界平衡解 $(1, 0)$ 和 $(0, B)$ 都是不稳定的。此时的分歧图见图 2.6- 右。

样我们基本完全分析了 Lotka-Volterra 竞争模型 (2.38) 的动力行为和分歧结构 (除了 $AC = 1$ 的退化情况, 我们留给读者自己考虑)。我们回忆参数 $B = \frac{\mu}{\lambda}$, 即物种 y 与物种 x 的单位增长率的比值。那么我们的分析说明当 $B < \min\{A^{-1}, C\}$, 即 y 的单位增长率与 x 相比较小, 则 y 最终必然灭绝, 而 x 会生存 (所有解收敛到 $(1, 0)$); 当 $B > \max\{A^{-1}, C\}$ 时, 则反之, y 会生存 x 会灭绝。在 B 处于中间值时, 系统拥有一个共存平衡解, 但是弱竞争与强竞争的情况有所不同: 弱竞争时共存解不稳定, 系统为双解结构; 而强竞争时共存解是稳定的, 共存解是唯一稳定的平衡解。

这里描述的分歧图从定性分析的角度说明了生态学中的**竞争排斥法则 (principle of competition exclusion)**。这里这一法则被解释为若共存解为 (x_*, y_*) 满足 $\frac{x_*}{1} + \frac{y_*}{B} \leq 1$, 则共存是不可能的, 竞争必有一方获胜, 而另一方灭绝。可以看到 $x + \frac{y}{B} = 1$ 是连接两个边界平衡解的直线段, 也就是说若竞争使得两种群总数量减少, 那么一方必然将另一方从竞争中排斥出去。这一法则是首先由俄国生物学家 Gause 在 1934 年提出的, 至今在生物数学中仍有争议, 但也有某些实验可以验证这一准则。

们指出上面例 2.4 中的平衡点分歧发生在 $(1, 0)$ 或 $(0, B)$, 从稳定变为不稳定的点。更精确地说, 是在平衡点的 Jacobian 矩阵 J 的行列式 $D = 0$ 的点。此时 J 具有一个零特征值。这一分歧的条件也适用于一般情况或高维问题, 我们在后面章节会给出分歧发生地确切条件。在这两点发生地分歧都是跨越分歧。

另一可能的分歧点发生在 Jacobian 矩阵的迹 $T = 0$ 的点, 若 $T = 0$ 而 $D > 0$, 则 J 具有一对纯虚特征值. 此时我们有以下定理:

定理2.2. (Hopf 分歧定理) 对于含参数 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的平面系统

$$\begin{cases} x' = f(\lambda, x, y), \\ y' = g(\lambda, x, y), \end{cases} \quad (2.43)$$

假设 f, g 为连续可微函数, 若 (2.43) 有一族平衡解 $\{(\lambda, x(\lambda), y(\lambda)) : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$ 使得 $x(\lambda), y(\lambda)$ 连续可微, $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, 且 Jacobian 矩阵 $J(\lambda) = D_{(x,y)}(f, g)$ 的特征值为 $\mu(\lambda) \pm i\omega(\lambda)$, 满足

$$(i) \quad \mu(\lambda_0) = 0, \quad \omega(\lambda_0) > 0;$$

$$(ii) \quad \mu'(\lambda_0) \neq 0.$$

那么 (2.43) 在 (λ_0, x_0, y_0) 附近有一组周期解 $\{(\lambda(s), x(s, t), y(s, t)) : 0 < s < \delta\}$ 其周期为 $T(s)$, 且 $\lim_{s \rightarrow 0^+} \lambda(s) = \lambda_0, \lim_{s \rightarrow 0^+} T(s) = \frac{2\pi}{\omega(\lambda_0)}, \lim_{s \rightarrow 0^+} (\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(s, t) - x_0| + |y(s, t) - y_0|)) = 0$.

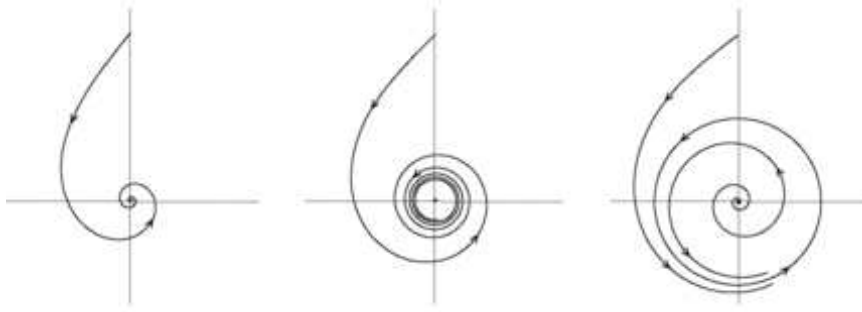


图 2.8 (左): $\lambda < \lambda_0$, (中): $\lambda = \lambda_0$, (右): $\lambda > \lambda_0$

例2.5. 我们讨论 Klausmeier 模型 (2.37) 中的平衡解和周期解分歧. 平衡解有 $(a, 0), (w_+, n_+), (w_-, n_-)$, 其中 $(w_{\pm}, n_{\pm})$ 为

$$w_{\pm} = \frac{2m}{M \pm \sqrt{M^2 - 4}}, \quad n_{\pm} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4}}{2},$$

在这里, $M = a/m$. 显然 $(w_{\pm}, n_{\pm})$ 只在 $M \geq 2$ 时存在, 在 $M = 2$ 时一个鞍结点分歧发生. Jacobian 矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} -1 - n^2 & -2wn \\ n^2 & 2wn - m \end{pmatrix},$$

所以 $(a, 0)$ 总是稳定结点, 其相应的特征值为 $-1, -m$. 在 $(w_{\pm}, n_{\pm})$ 处我们有:

$$J(w_{\pm}, n_{\pm}) = \begin{pmatrix} -Mn_{\pm} & -2w \\ Mn_{\pm} - 1 & m \end{pmatrix},$$

那么在 (w_-, n_-) 点处, 若 $M > 2$, 则

$$\text{Det}(J) = m \left(\frac{2M}{M + \sqrt{M^2 - 4}} - 2 \right) < 0,$$

因此, (w_-, n_-) 在 $M > 2$ 时必然为鞍点。另一方面, 在 (w_+, n_+) 点处

$$\text{Det}(J) = m \left(M \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2} - 2 \right) > m \left(\frac{M^2}{2} - 2 \right) > 0,$$

若 $M > 2$, 在 (w_+, n_+) 处的

$$\text{Tr}(J) = -Mn_+ + m = -\frac{M(M + \sqrt{M^2 - 4})}{2} + m.$$

令 $h(M) = M \frac{M + \sqrt{M^2 - 4}}{2}$, 则容易验证 h 在 $M > 2$ 时连续可微, 对于 $M > 2$, $h'(M) > 0$, 那么当 $m < 2$ 时 $\text{Tr}(J) < 0$ 对 (w_+, n_+) 始终成立。而 $m > 2$ 时, 存在唯一的 $M_n > 2$ 使得 $\text{Tr}(J) = 0$, 而 (w_+, n_+) 在 $M > M_n$ 稳定, 但在 $2 < M < M_n$ 时不稳定。在 $M = M_n$ 时, $\text{Det}(J) > 0$, $\text{Tr}(J) = 0$, 所以特征方程有一对纯虚根。事实上在 $M = M_n$ 附近有一对复特征根 $\alpha(M) \pm i\beta(M)$ 使得 $\alpha(M) = \frac{\text{Tr}(J)}{2}$, $[\alpha(M)]^2 + [\beta(M)]^2 = \text{Det}(J)$, 那么 $\alpha'(M_n) = \frac{1}{2}(\text{Tr}(J))' = -\frac{1}{4}h'(M_n) < 0$, 因此 Hopf 分枝定理所有条件都满足, 在 M_n 点有一族周期解从 $(M, w_+(M), n_+(M))$ 分枝出来。

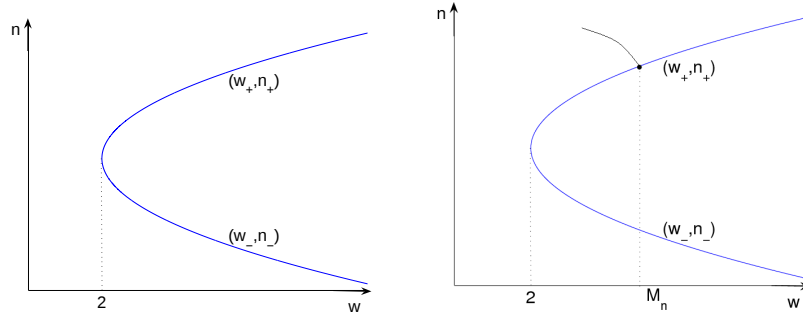


图 2.9 Klausmeier 模型 (2.37) 的分枝图。(左): $0 < m < 2$; (右): $m > 2$ 。

Hopf 分枝可以得到小振幅周期轨道。建立周期轨道存在性的另一方法 Poincare-Bendixson 理论, 我们把这一理论一些有用的部分集中在以下定理:

定理2.3. 考虑平面系统 (2.6). 假设 (f, g) 连续可微。

- (1) 若 $\Sigma_0 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ 是 (2.6) 的一个周期轨道, 则 Σ_0 的内部包含一个平衡点;
- (2) 若 $O \subset \mathbb{R}^2$ 是一个开子集, O 中不包含任何平衡点, 在 O 的边界 ∂O 上每个点, 向量场 (f, g) 指向 O 内部, 则 O 中必含一个周期轨道;
- (3) 若 $\Sigma_1 = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$ 是 (2.6) 的一个有界轨道, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, Σ_1 必然收敛到以下其中之一: (a) 一个平衡点; (b) 一个周期轨道; (c) 一个由异宿/同宿轨道连接成的集合。
- (4) (Dulac 准则): 若 $O \subset \mathbb{R}^2$ 是一个单连通开子集, $B: O \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续可微函数使得 $\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{\partial y}$ 不变号且不恒为零, 则没有任何周期轨道完全在 O 内部。

Poincare-Bendixson 理论与下面的 LaSalle 不变原理可以配合使用。

定理2.4. 考虑平面系统 (2.6), 若 $O \subset \mathbb{R}^2$ 是一个连通开子集,

(a) 存在 $V: O \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续可微函数, 使得 $V(x, y) \geq C$, $C \in \mathbb{R}$, 且对任何 (2.6) 的解 $(x(t), y(t))$,
 $\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) \leq 0$;

(b) O 对于 (2.6) 是不变的, 即 $(x_0, y_0) \in O$, 则从 (x_0, y_0) 出发地解始终在 O 中.

那么对于 $(x_0, y_0) \in O$, 从 (x_0, y_0) 出发的解必然收敛到

$$\{(x, y) \in O : \dot{V}(x, y) = 0\},$$

$$\text{这里, } \dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot g(x, y).$$

现在我们把所有的理论应用到例 2.3 中的捕食模型.

例2.6. 回忆以下的 *Rosenzwing-MacArthur* 捕食模型:

$$\begin{cases} x' = x(1 - \frac{x}{K}) - \frac{mxy}{1+x}, \\ y' = -\theta y + \frac{mxy}{1+x}, \end{cases} \quad (2.44)$$

我们只考虑 $x \geq 0, y \geq 0$. 平衡解有 $(0, 0), (K, 0), (\lambda, V_\lambda)$, 其中

$$\lambda = \frac{\theta}{m - \theta}, \quad V_\lambda = \frac{(K - \lambda)(1 + \lambda)}{Km},$$

那么共存解 (λ, V_λ) 在第一象限的条件是 $0 \leq \lambda \leq K$. 当 $\lambda \geq K$ 时, $(K, 0)$ 是全局稳定的, 即对任何 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (K, 0)$. 对于 $0 < \lambda < K$, 容易算出

$$J(\lambda, V_\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda(K - 1 - 2\lambda)}{K(1 + \lambda)} & -\theta \\ \frac{K - \lambda}{K(1 + \lambda)} & 0 \end{pmatrix}$$

那么, 若 $0 < \lambda < K$, $\text{Det}(J) = \frac{\theta(K - \lambda)}{K(1 + \lambda)} > 0$, 而 $\text{Tr}(J) = \frac{\lambda(K - 1 - 2\lambda)}{K(1 + \lambda)}$, 所以 (λ, V_λ) 在 $0 < \lambda < \frac{K-1}{2}$ 时是不稳定的, 在 $\frac{K-1}{2} < \lambda < K$ 时是稳定的.

我们用 Dulac 准则证明在 $\frac{K-1}{2} < \lambda < K$ 时在第一象限没有周期轨 (Hsu-Hubble-Waltman, 1978): 令 $h(x, y) = (\frac{x}{1+x})^\alpha y^\delta$, 其中 $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ 可以根据 Dulac 准则需要选取, 这里我们略去细节. 对于恰当的 $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, 可证明

$$\frac{\partial(fh)}{\partial x} + \frac{\partial(gh)}{\partial y} \leq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

从而由定理 2.3 中的 Dulac 准则, 得到 (2.44) 在 $\frac{K-1}{2} < \lambda < K$ 时没有周期轨. 因为此时 (λ, V_λ) 是稳定的, 所以 (2.44) 不存在异宿轨道环, 那么根据定理 2.3(3), 对于任意 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, $x_0 \neq 0, y \neq 0$, 必有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\lambda, V_\lambda)$, 即 (λ, V_λ) 是全局渐近稳定的. 注: 轨道极限不可能是 $(0, 0)$, 因为 $(0, 0)$ 是不稳定结点, $(K, 0)$ 是鞍点且唯一稳定轨道在 x -轴上.

在 $0 < \lambda < \frac{K-1}{2}$ 时, (λ, V_λ) 是不稳定的, 那么根据定理 2.3, (2.44) 在第一象限必有一个周期轨道. 我们也可以用 Hopf 分歧定理得出周期轨道存在性. 周期轨道的唯一性和稳定性是一个困难的问题. 对于

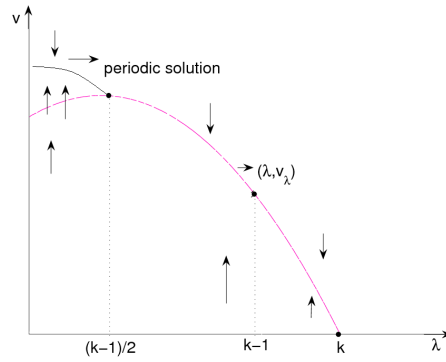
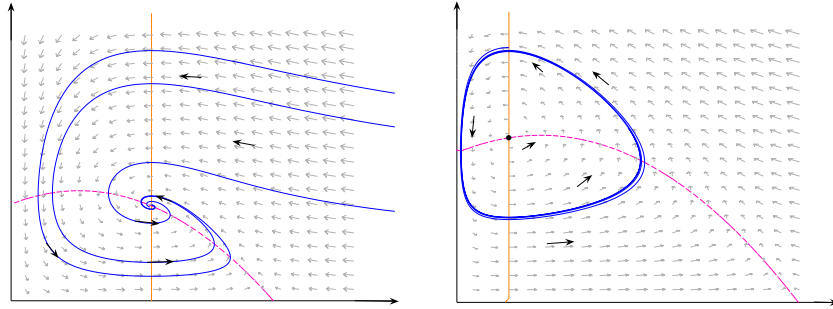


图 2.10 (2.44) 的分歧图。

(2.44), (郑国顺, 1981) 首先证明了 $0 < \lambda < \frac{K-1}{2}$ 时, 唯一周期轨是除 (λ, V_λ) 外全局稳定的。后来 (张芷芬, 1986), (Kuang-Freedman, 1988) 等将 (2.44) 转化为 Lienard 方程, 利用 Lienard 方程周期轨唯一性证明了 2.44 周期轨唯一性。他们的证明可用于更一般的捕食模型 (2.13)。

图 2.11 (2.44) 的相图。(左): $(k-1)/2 < \lambda < k$; (右): $0 < \lambda < (k-1)/2$ 。

2.44 的唯一稳定周期轨称为**极限环 (limit cycle)**, 它说明 Rosenzwing-MacArthur 捕食模型可产生稳定持续的振荡。上述分歧也可以固定 $\lambda = \frac{\theta}{m-\theta}$, 以 K (承载力) 作为分歧参数, 这样当 $K < \lambda$ 时, 环境不够优越, 捕食者灭亡而被捕食者生存, 而 $\lambda < K < 1 + 2\lambda$ 时, 环境改善, 捕食者和被捕食者稳定在共存解 (λ, V_λ) , 但是 $K > 1 + 2\lambda$ 时, 这一稳定性被极限环稳定性代替。周期振荡比共存平衡解更容易被其他扰动导致物种灭亡。因此, (Rosenzwing, 1971) 称这一现象为**环境改善的悖论 (paradox of enrichment)**。

§2.6 二元离散模型

相应于二元连续方程模型 (2.6), 我们可以考虑下述二元离散模型:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (2.45)$$

一些相应的线性化理论, 稳定性理论可以被建立, 但是二元连续系统的相图分析不能被利用到 (2.43), 因此 (2.45) 解的全局分析可用的工具很少, 事实上如同一元模型, 混沌现象可以经常在 (2.45) 中出现。因此我们在这里举几个例子。

例2.7. (Hardy-Weinberg 法则) 这是英国数学家 Hardy(1908) 和德国医生 Weinberg (1908) 提出的基因随后代遗传的基本法则。基因 (genetics) 可以表现在生物的一种表现型 (phenotype) 上, 而这一显性是有基因型 (genotype) 决定的, 不同的表现型的基因型是不同的。每个基因型是由等位基因 (Allele) 组合而成。例如一种基因有两种等位基因 A 和 a , 而基因型有 AA , Aa , aa 三种, AA 和 aa 称为同质基因型 (homozygote), Aa 称为异质基因型 (heterozygote)。一般来说基因型加上环境因素就可以决定表现型。

在一个生物种群中, 某个基因型的比例各有不同, 如果这一生物种群可以看成一代一代遗传, 那么我们定义第 n 代生物种这一基因型的等位基因 A 的比例为 p_n , a 的比例为 q_n , 则 $p_n + q_n = 1$. 如果假设性别比例, 死亡率, 存活率是不依赖与基因型, 交配是随机的, 那么 (p_n, q_n) 满足

$$\begin{cases} p_{n+1} = p_n^2 + \frac{1}{2} \cdot 2p_nq_n = p_n \\ q_{n+1} = q_n^2 + \frac{1}{2} \cdot 2p_nq_n = q_n \end{cases} \quad (2.46)$$

(2.46) 即是 Hardy-Weinberg 法则: 各个等位基因在基因型中的比例随遗传保持不变。

当然 (2.46) 成立的假设是很强的, 现在我们改变其中一个假设: 即各基因型存活率相同。那么假设 AA , Aa , aa 三基因型存活率分别为 S_1 , S_2 , S_3 , 而三基因型的出现频率为 p_n^2 , $2p_nq_n$, q_n^2 . 在这一假设下, (2.46) 变为:

$$\begin{cases} p_{n+1} = \frac{(S_1p_n^2 + S_2p_nq_n)p_n}{S_1p_n^2 + 2S_2p_nq_n + S_3q_n^2} \\ q_{n+1} = 1 - p_{n+1} \end{cases} \quad (2.47)$$

(2.47) 称为 Fisher-Haldane-Wright 方程, 是基因遗传学中的基本方程。若等位基因 A 是显性 (dominant) 且是优于 a (advantageous), 那么 $S_1 = 1$, $S_2 = S_3 = 1 + S$, (2.47) 可简化为:

$$p_{n+1} = p_n + \frac{Sp_n(1-p_n)^2}{1 - Sp_n^2}, \quad (2.48)$$

若 A 是隐性 (recessive) 且优于 a (advantageous), 那么 $S_1 = S_2 = 1$, $S_3 = 1 + S$, (2.47) 成为:

$$p_{n+1} = p_n + \frac{Sp_n^2(1-p_n)}{1 - Sp_n^2}, \quad (2.49)$$

这里 S 是一个很小的正常数。由定理 2.4 可知 $\{p_n\}$ 是单增序列 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$, 这说明优良基因 A 最终取代 a 。这和 Hardy-Weinberg 法则是完全不同的。

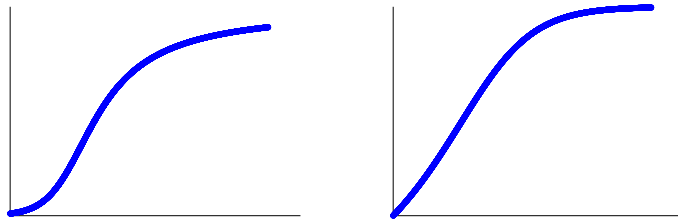


图 2.12 Fisher-Haldane-Wright 方程展示的基因进化过程。(左): (2.48), (右): (2.49)

我们指出 (2.47) 可被如下微分方程近似表示:

$$\frac{dp}{dt} = p(1-p) \frac{(S_1 - S_2)p + (S_2 - S_3)(1-p)}{S_1 p^2 + 2S_2 p(1-p) + S_3(1-p)^2}. \quad (2.50)$$

在 (2.50) 中, 若 S_1, S_2, S_3 非常近似, 则 $S_1 p^2 + 2S_2 p(1-p) + S_3(1-p)^2 \approx 1$, 那么 (2.50) 变为

$$\frac{dp}{dt} = p(1-p)[(S_1 - S_2)p + (S_2 - S_3)(1-p)]. \quad (2.51)$$

(2.50) 和 (2.51) 都可以用第一章的方法分析, 若 $S_1 - S_2 = S_2 - S_3 = S$, 则 (2.51) 退化为 Logistic 方程。事实上这正是后面要介绍的反应扩散 Fisher 方程的来源。

最后我们列举几个生态学中常见的二元非线性差分方程组。Nicholson-Bailey 寄生物 - 宿主模型 (parasitoid-host model):

$$\begin{cases} N_{n+1} = N_n \exp(r - ap_n), \\ p_{n+1} = N_n(1 - \exp(-ap_n)). \end{cases} \quad (2.52)$$

在 (2.52) 中加入寄生物的生长极限, 可得到 Beddington 模型:

$$\begin{cases} N_{n+1} = N_n \exp\left(r\left(1 - \frac{N_n}{K}\right)\right), \\ p_{n+1} = N_n(1 - \exp(-ap_n)). \end{cases} \quad (2.53)$$

在 20 世纪 90 年代, (Constantino, Desharhais, Dennis, Cushing, 1997) 提出一个简单描述面粉瓢虫 (flour beetle) 的模型:

$$\begin{cases} L_{n+1} = \beta A_n \exp(-c_1 A_n - c_2 L_n), \\ P_{n+1} = L_n(1 - \delta_1), \\ A_{n+1} = P_n \exp(-c_3 A_n) + A_n(1 - \delta_2), \end{cases} \quad (2.54)$$

这里 L_n 是幼虫数目, P_n 是所有介于幼虫与成虫之间的数目, A_n 是成虫数目。(2.54) 的数值结果与实验数据吻合较好, 从而“证明”了种群生态学里也可以出现混沌。

§2.7 第二章练习题

1. 考虑下述线性系统:

$$\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y, \quad Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

对于任意 $a \in \mathbb{R}$, 试决定系统类型及分歧点。

2. 考虑如下系统:

$$\begin{cases} x' = x(2 - x - y) \\ y' = y(y - x^2) \end{cases}.$$

试决定 $x \geq 0, y \geq 0$ 区域相图, 画出 nullclines, 平衡解, Jacobian 矩阵, separatrix, 用 pplane 画出相图。

3. 考虑如下互惠模型:

$$\begin{cases} x' = ax(1 - bx + cy) \\ y' = dy(1 - ey + fx) \end{cases}.$$

导出一等价无量纲方程组。

4. 讨论互惠模型

$$\begin{cases} x' = x(1 - x) + Axy \\ y' = y(B - y) + Cxy \end{cases}$$

的动力行为, 分歧现象, 画出平衡解的分歧图。

5. 考虑 Schnakenberg 化学反应方程

$$\begin{cases} x' = x^2y - x + b \\ y' = -x^2y + a \end{cases}.$$

(a) 求出平衡解, 研究其稳定性;

(b) 用 Matlab 画出 (a, b) 参数平面上平衡解稳定和不稳定的分界曲线;

(c) 若 $a = 2b$, 求出 Hopf 分歧点。用 MatCont 决定分歧方向, 及周期轨道分歧图;

(d) 证明方程的解有界, 从而证明当平衡解不稳定是, 方程有以周期轨道。(提示: $(x+y)' = a+b-x$)

6. 继续例 2.5 的讨论: 能否证明 $m < 2$ 时方程没有周期解?

(a) 证明方程的解有界;

(b) 试用 pplane, MatCont 发现更多结果。

第三章 反应扩散方程

§3.1 扩散方程

扩散 (diffusion) 是物质 (粒子或分子) 在空间传播的形式, 例如热, 光等。笼统地说, 扩散使物质从浓度高的地方分散到浓度低的地方。扩散是一个物理过程而非化学过程, 即物质的性质在传递过程中不发生变化, 所以这一过程也不消耗能量。在细胞生物学中, 扩散被描述为一种波动的传播方式, 物质以这种形式超越细胞膜。最早被研究的扩散现象是热传导过程 (heat transfer)。

扩散方程可由物理守恒律 (conservation law) 和 Fick 法则推得。设 D 为一空间区域, 即 $D \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开子集。设 $u(t, x)$ 为一种物质在时间 t 时和位置 x 点处的密度 (或浓度) 函数。密度函数一般这样定义: 对于 $\forall x \in D$, 定义 (O_n) 为一族包含 x 的开邻域, 且 $O_n \supset O_{n+1}$, $m(O_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 这里 $m(O_n)$ 为 O_n 的体积 (测度)。那么密度函数 $u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{物质在 } O_n \text{ 中的量}}{m(O_n)}$ 。这里我们不深究这一极限是否严格存在, 但对于大多数问题这一定义是合理的。这里物质的量可以是个体数量, 或质量, 或其他基本物理量。那么对于任意 $O \subset D$ 区域, 在 O 中的量是

$$U(t) = \int_O u(t, x) dx.$$

我们考虑 $U(t)$ 随时间发生的变化。在相应函数足够好的条件下,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_O u(t, x) dx = \int_O \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx.$$

另一方面, $U(t)$ 的变化完全由物质从 O 的边界移进移出决定, 那么

$$\frac{dU}{dt} = - \int_{\partial O} J(t, x) \cdot n(x) dS,$$

这里 $J(t, x)$ 是物质在边界点 x 上的向内通量 (flux), 这是一个向量, 而 $n(x)$ 是点 x 的单位外法向量。那么, $-\int_{\partial O} J(t, x) \cdot n(x) dS$ 代表了从 O 的外部流入 O 的物质的总通量, 这恰是 $U(t)$ 的增加量。由散度定理,

$$\int_{\partial O} J(t, x) \cdot n(x) dS = \int_O \operatorname{div}(J(t, x)) dx.$$

那么我们得到下列物理守恒律

$$\int_O \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx + \int_O \operatorname{div}(J(t, x)) dx = 0.$$

因为函数 $u_t(t, x) - \operatorname{div}(J(t, x))$ 在任意区域 O 上的积分都为零, 所以一定恒为零。那么我们得到基本守恒方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}(J(t, x)) = 0. \quad (3.1)$$

Fick 法则 (Fick's law) 就是“物质由高浓度处流向低浓度处”的数学形式。我们知道对于一个函数 $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, u 的值下降最快的方向是负梯度 (gradient) 方向, 所以 Fick 法则是

$$J(t, x) = -d\nabla_x u(t, x). \quad (3.2)$$

这里 ∇_x 是对 x 分量的梯度, 将 (3.1) 和 (3.2) 相结合, 且利用 $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$, 我们得到如下扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u(t, x), \quad t > 0, x \in D, \quad (3.3)$$

其中,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$$

是 Laplace 算子, d 是扩散系数 (diffusion coefficient)。

扩散方程可以用多种其他的方式导出。以一维扩散方程为例, 即 $D = (a, b)$, 一个区间, 或 $D = \mathbb{R}^n$, 实数轴。若将 $\mathbb{R}$ 离散化为间隔是 Δx 的格点, 物质也被个体化为粒子, 粒子在 $\mathbb{R}$ 的格点上随机跳跃到左, 右邻域。令 $u(t, x)$ 为时间 t 时在格点 x 处的粒子个数。假设每个粒子向左或向右跳的概率均为 $\frac{1}{2}$, 则

$$u(t + \Delta t, x) = \frac{1}{2}u(t, x - \Delta x) + \frac{1}{2}u(t, x + \Delta x), \quad (3.4)$$

这里 Δt 是跳跃一次的时间。当 Δt 和 Δx 都很小时, 我们用 Taylor 公式将 (3.4) 中的量展开, 就得到

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t, x) &= u(t, x) + \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\Delta t + \text{高阶项} \\ u(t, x \pm \Delta x) &= u(t, x) \pm \frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)(\Delta x)^2 + \text{高阶项}. \end{aligned}$$

由 (3.4) 及忽略高阶项即得

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x).$$

这里可以忽略高阶项及方程有意义的条件是

$$\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0, \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = d > 0.$$

那么我们又得到一维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x). \quad (3.5)$$

这一推导方式是基于随机漫步 (random walk) 的概念, 这可以看成是 Brown 运动的的一种一维形式。若将 $\mathbb{R}$ 上的格点换成 $\mathbb{R}^n$ 上的格点, 我们也可以推导 n 维空间上的扩散方程 (3.3)。若粒子向左或向右跳的概率为 $p \neq q (p + q = 1)$, 则我们会得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - u_0 \frac{\partial u}{\partial x}(t, x), \quad (3.6)$$

这里

$$u_0 = \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \frac{(q - p)\Delta x}{\Delta t}.$$

(3.6) 是扩散漂流方程 (diffusion-advection equation), u_0 代表粒子随一个固定方向漂流的速度。

最后我们指出扩散系数 d 的量纲为 $L^2 T^{-1}$ (L 为长度, T 为时间), d 的大小可由实验测得, 一般 d 随温度和介质的变化而变化。

§3.2 基本解及生物应用

假如物质的传播不受区域边界影响, 我们可以考虑在全空间 $\mathbb{R}^n$ 中的传播. 扩散方程的基本解 (fundamental solution) 满足

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \delta_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.7)$$

这里 $\delta_0(x)$ 是 Dirac-Delta 函数, 即广义函数

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \infty & x = a, \\ 0 & x \neq a, \end{cases} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \delta_a(x) dx = 1.$$

由偏微分方程理论 (Fourier 变换) 可求得 (3.7) 的解

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi dt)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4dt}}. \quad (3.8)$$

利用基本解也可求得初值问题

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (3.9)$$

的解

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4dt}} u_0(y) dy. \quad (3.10)$$

扩散方程的基本解也可以用多种方式导出. 另一个有用的观点是沿用前一节的 random walk 的想法. 为避免使用概率论术语, 我们考虑以下问题: 若一个粒子从 O 点出发, 在每个单位时间内向左或向右走一步. 那么在 n 步以后走到 m 点的可能性有多大. 这个问题会依赖于 n 和 m 的奇偶性. 但是, 容易看出这个过程导致一个形如二次分布 (binomial distribution) 的离散概率分布:

$$P(n, m) = 2C_n^m \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

这里 $P(n, m)$ 是在 n 次后距离 O 点为 m 个单位的概率, $0 \leq m \leq n$. 由概率论中的中心极限定理可知, 二次分布在正规化后收敛为均值为 0, 方差为 1 的正规分布 (Normal distribution):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

事实上我们可以看到 $n = 1$ 时的基本解恰是均值为 1, 方差为 $\sqrt{2Dt}$ 的正规分布函数, 而方差以 $\sqrt{2Dt}$ 的速度增加说明了扩散将密度分布均匀化.

对于基本解的讨论可应用于生物侵入 (biological invasion) 的问题. 这里我们主要考虑空间维数 $n = 2$ 时的情况. 当一个新物种进入一个环境中密度的初始值可看成是一个 δ 函数, 而新物种在密度低时增长呈线性, 所以我们有 Malthus 型扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + au, & t > 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(0, x, y) = M\delta_{(0,0)}(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (3.11)$$

这里 $a > 0$ 是单位增长率, M 是新物种初始总量. 那么 (3.11) 的解为

$$u(t, x, y) = \frac{M}{4\pi dt} e^{at - \frac{x^2 + y^2}{4dt}}, \quad (3.12)$$

而这一物种的总数为指数增长

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(t, x, y) dx dy = M e^{at}. \quad (3.13)$$

我们可以认为初始时该物种“占据”的区域仅为 $(0, 0)$ 点, 所以区域半径为 0, 而在时间 $t > 0$, 该物种“占据”区域为一个半径为 $R(t)$ 的圆. 我们假设这一区域外部的生物数量始终为 M , 则

$$\int_{\mathbb{R}^2 - B_{R(t)}} u(t, x, y) dx dy = M e^{at} e^{-\frac{R^2(t)}{4dt}} = M,$$

这样得到

$$R(t) = \sqrt{4adt}, \quad A(t) = 4\pi ad t^2. \quad (3.14)$$

这里 $A(t)$ 是该物种已经侵入的区域面积. 这个区域半径以 $\sqrt{4ad}$ 的速度扩大. 这一结果在 1951 年被 (Skellam, 1951) 用来考虑北美洲麝鼠 (muskrat) 在欧洲扩散的速度.

年份	1905	1909	1911	1915	1920	1927
面积 (km ²)	0	5400	14000	37700	79300	201600

表 3.1 麝鼠在欧洲中部的扩散数据

利用 (3.14) 和数据拟合, 可得 $ad \approx 32.15$, 那么麝鼠存在区域的增大速度为 $R'(t) = \sqrt{4ad} = 11.34$ (公里/年). 类似方法被用到测定动物存在区域的大小变化. 应该指出当密度大时, 指数增大已经不适合, 但这一方法还是近似给出了可能的范围.

$R'(t) = \sqrt{4ad}$ 这件事也可以用行波解 (traveling wave) 的观点来看. 考虑 $n = 1$ 时的 Malthus 方程

$$u_t = du_{xx} + au, \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

若解的形式为 $u(x, t) = v(x - ct)$, 则 $v(z)$ 满足

$$dv'' + cv' + av = 0, \quad z \in \mathbb{R}.$$

因为 $v(z)$ 必须是一个正解, 因此 $c \geq \sqrt{4ad}$. (若 $c < \sqrt{4ad}$, 解必会变号). 若我们取最小波速 $c = \sqrt{4ad}$, 可得解

$$v(z) = c_1 e^{\sqrt{a}z} + c_2 z e^{\sqrt{a}z}.$$

因为 $v(z) \geq 0$, 那么 $c_2 = 0$, 所以 $v(z) = c_1 e^{\sqrt{a}z}$. 而“行波解”为

$$u(t, x) = c_1 e^{\sqrt{a}(x - \sqrt{4adt})}.$$

这一方法说明上面结果的合理性, 同时也暴露出模型的缺陷, 这一行波解是无界的. 后面我们会用 Logistic 增长代替 Malthus 增长来解决这一问题.

§3.3 边值问题及生存最小区域

一个生物种群生活在其栖息地 (habitat). 栖息地都是有界的, 因此我们可以假设栖息地是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开区域 D . 栖息地边界往往是危险的, 我们假设在边界上 $u = 0$. 则

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + au, & t > 0, x \in D, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in D, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial D, \end{cases} \quad (3.15)$$

这里 ∂D 是 D 的边界. 由分离变量法 $u(t, x) = U(t)V(x)$ 可得

$$\begin{cases} U'(t) = kU(t), & t > 0, \\ d\Delta V(x) + aV(x) = kV(x), & x \in D, \\ V = 0, & x \in \partial D, \end{cases}$$

则 $\lambda = (a - k)/d$ 是 Laplace 算子的特征值, 满足

$$\begin{cases} -\Delta V(x) = \lambda V(x), & x \in D, \\ V(x) = 0, & x \in \partial D, \end{cases} \quad (3.16)$$

由特征值理论可知 (3.16) 有一列特征值 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty$. 事实上为以后讨论需要, 我们介绍一个更一般的结论 (证明见 (史峻平, 2009)).

定理3.1. 考虑

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = \lambda u(x), & x \in D, \\ u(x) = 0, & x \in \partial D, \end{cases} \quad (3.17)$$

这里 $c(x)$ 是 $\overline{D}$ 上的连续函数. 则

(1) (3.17) 的特征值为 $\{\lambda_i(c) : i \geq 1\}$, $\lambda_i(c) < \lambda_{i+1}(c)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i(c) = \infty$.

(2) $\lambda_1(c)$ 是一个单特征值, 即当 $\lambda = \lambda_1(c)$, (3.17) 的解空间是一维的, 且由一个正函数 $\varphi_1^c(x) > 0$ 张成.

(3) (Courant-Fischer)

$$\lambda_i(c) = \max_{S_i} \min_{u \in S_i} R_c(u) = \min_{S_{i-1}} \max_{u \perp S_{i-1}} R_c(u).$$

令

$$R_c(u) = \frac{\int_D (|\nabla u|^2 + c(x)u^2) dx}{\int_D u^2 dx},$$

这里 S_1 是 $W_0^{1,2}(D)$ 任意 i -维子空间. ($W_0^{1,2}(D)$ 会在后面介绍)

特别对于 $c(x) \equiv 0$, 即 (3.16) 的情况, 我们将特征值、特征函数记为 (λ_i, φ_i) . 那么 (3.15) 可由 Fourier 级数解得

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{(a-d\lambda_1)t} \varphi_i(x), \quad (3.18)$$

其中 $c_i = \int_D u_0(x) \varphi_i(x) dx$, 若 $\int_D \varphi_i^2(x) = 1$, $\int_D \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0 (i \neq j)$. 由 (3.18) 可知, 若 $a < d\lambda_1$, 则当 $t \rightarrow \infty$, $u(t, x) \rightarrow 0, \forall x \in D$; 若 $a > d\lambda_1$, $u(t, x)$ 是无界的. 因此 $a = d\lambda_1$ 可以看成 (3.15) 的一个分岐点.

因为 a 是单位增长率, 一般可看成常数, 而栖息地 D 可能随自然环境或人类干预而缩小. 从定理 3.1-(3) 可知若 $D_1 \subset D_2$, 则 $\lambda_1(D_1) > \lambda_1(D_2)$. 例如当 $n = 1, D = (0, l\pi)$ 时, (3.16) 变成

$$\begin{cases} -V'' = \lambda V, & x \in (0, l\pi), \\ V(0) = V(l\pi) = 0, \end{cases} \quad (3.19)$$

其特征值为 $\lambda_i(l) = i^2/l^2$, 特征函数为 $\varphi_i(x) = \sin(ix/l)$. 那么当 l 增大时, $\lambda_i(l)$ 减小. 今天人类不断增加农业用地, 将森林、草原这样的自然栖息地转化为他用. 生物学家们称之为栖息地分裂化 (habitat fragmentation). 数学上可以看作在时间 t 时成栖息地为 D_t 而 D_t 随时间减小. 那么在初始状态 D_t 很大所以 $\lambda_1(D_t) < a/d$, $u(t, x)$ 不会灭绝 ($t \rightarrow 0$), 但从某一时刻 $t = t_0$, $\lambda_1(D_{t_0}) = a/d$ 且当 $t > t_0$ 后 $\lambda_1(D_t) > a/d$ 则此物种将灭绝, 即使在 (3.15) 中有线性增长.

相对应 $\lambda_1(D) = a/d$ 的栖息地 D 称为最小生存空间 (minimal patch size). 当然第一特征值大小依赖于 D 的几何形状. 若几何形状区别不大时 (比如总是接近圆形), 则最小生存空间可被栖息地的直径来表示. 例如对于一维情形 (3.19), 可解得的最小生存空间直径为

$$l = \sqrt{\frac{d}{a}}.$$

值得一提的是, 最小生存空间的概念依赖于边界条件的选取. 若边界条件是 Neumann 条件 (无通量, no flux)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = 0. \quad (3.20)$$

则在任意区域 D 上, 此种群都可生存, 因为特征值问题

$$\begin{cases} -d\Delta V = \lambda V, & x \in D, \\ \frac{\partial V}{\partial n} = 0, & x \in \partial D \end{cases} \quad (3.21)$$

的第一特征值为 0, 第一特征函数 $C \neq 0$. 条件 (3.20) 意味着生物种群的每个个体都不能跑出栖息地, 那么正的增长率 a 使得种群总数量呈指数增长. 即对于

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + au, & t > 0, x \in D, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in D, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial D, \end{cases} \quad (3.22)$$

的解 $u(t, x)$, 若在 D 上对方程积分可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_D u dx &= \int_D \frac{\partial u}{\partial t} dx \\ &= \int_D (d\Delta u + au) dx = d \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} dS + a \int_D u dx = a \int_D u dx, \end{aligned}$$

那么,

$$\int_D u(t, x) dx = e^{at} \int_D u_0(x) dx.$$

对于 Dirichlet 边值条件, 即 (3.15) 中的条件, 对于每个边界点 x , $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$ 。所以当 a 不够大时, 物种会灭绝。另一个常数的边值条件是 Robin 条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -au, \quad x \in \partial D. \quad (3.23)$$

这一条件的含义是: 种群个体溢出栖息地 D 的个数与边界上的密度成正比。这介于 Dirichlet 边值 (全部溢出) 和 Neumann 边值 (从不溢出) 之间。这三种边界条件也往往可统一地写成

$$S \frac{\partial u}{\partial n} + (1 - S)u = 0, \quad x \in \partial D. \quad (3.24)$$

这里 $0 \leq S \leq 1$, 这一条件包括了 Dirichlet ($S = 0$), Neumann ($S = 1$) 和 Robin ($0 < S < 1$) 三类条件。我们指出在 Robin 条件下, 最小生存空间的概念是有意义的, 具体计算 ($n = 1$ 情况) 留作习题。

§3.4 反应扩散方程, 行波解

在 (3.1) 的方程推导中, 我们假设物质的量的改变只可能从边界出入造成, 这是一个纯物理过程。若我们现在也考虑物质在区域内部产生或消亡的过程, 那么基本守恒律为

$$\int_O \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dx + \int_O \operatorname{div}(J(t, x)) dx - \int_O f(t, x, u) dx = 0,$$

而基本守恒方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \operatorname{div}(J(t, x)) = f(t, x, u). \quad (3.25)$$

这里 $f(t, x, u)$ 为在时间 t , 空间位置 x , 密度 u 的条件下的增长率。

物质的产生和消亡是一个化学 (反应) 或生物 (出生或死亡) 过程。在 Fick 法则下, (3.25) 成为一个反应扩散方程 (reaction-diffusion equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = d\Delta u(t, x) + f(t, x, u). \quad (3.26)$$

第一章中的论证可以全部照搬, 来考虑自治反应扩散方程, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = d\Delta u(t, x) + f(u). \quad (3.27)$$

在这一章我们只考虑最著名的 Fisher-KPP 方程, 即 Logistic 扩散方程

$$u_t = d\Delta u + au(1 - \frac{u}{N}). \quad (3.28)$$

这个方程最早在 1937 年, 由生物遗传学家 Fisher (Fisher, 1937) 提出, 苏联几个著名数学家立即做出了一些重要的数学工作 (Kolmogoroff, Petrovsky, Piscounoff, 1937)。Fisher 的推导就是基于 2.6 节中的 Fisher-Haldane-Wright 方程, 但是现在 $u(t, x)$ 的含义是在空间位置 x 处的某等位基因的比例。他所关心的问题是一个优良基因怎样在空间上逐渐取代不良基因。这里我们只考虑 $D = \mathbb{R}^1$ 且 $N = 1$ 的情况:

$$u_t = du_{xx} + au(1 - u), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}. \quad (3.29)$$

方程的行波解 (traveling wave) 满足: $u(t, x) = v(x - ct)$, 这里 c 为待定波速。那么 $v(z)$ 满足

$$-cv' = dv'' + av(1 - v),$$

可转化为常微分方程组

$$v' = w, \quad w' = -\frac{c}{d}w - \frac{a}{d}v(1-v). \quad (3.30)$$

由相图分析易得 (3.30) 有两个平衡解: $(0, 0)$, $(1, 0)$ 。在两点处的 Jacobian 矩阵为

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a}{d} & -\frac{c}{d} \end{pmatrix}, \quad J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a}{d} & -\frac{c}{d} \end{pmatrix}$$

因此, $(1, 0)$ 总是一个鞍点。而在 $(1, 0)$ 处, $Tr(J(1, 0)) = -\frac{c}{d} < 0$, $Det(J(1, 0)) = \frac{a}{d} > 0$, 所以 $(0, 0)$ 是稳定的。但是, $T^2 - 4D = \frac{c^2 - 4ad}{d^2}$ 可以为正或负。当 $c \geq \sqrt{4ad}$ 时, $(0, 0)$ 是一个稳定结点, 而当 $c < \sqrt{4ad}$ 时, $(0, 0)$ 是一个稳定螺旋。

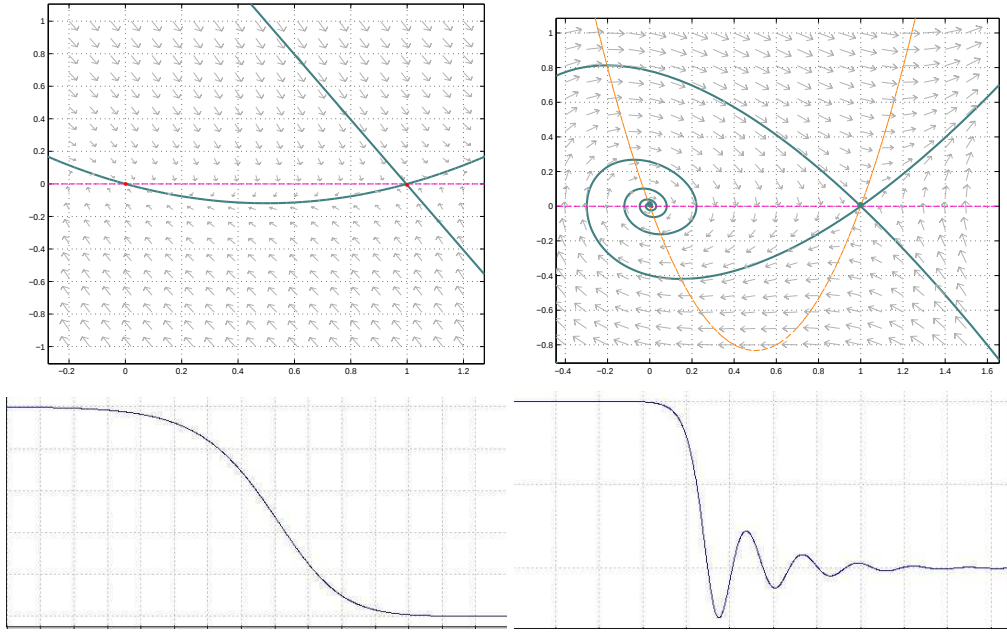


图 3.1 行波解分析中的相图和解曲线: $a = d = 1$, (上左) $c = 2.1$ 时相图; (上右) $c = 0.3$ 时相图; (下左) $c = 2.1$ 时正行波解形状; (下右) $c = 0.3$ 时变号行波解形状。

从相图分析可知, 对于 $\forall c > 0$, 鞍点 $(1, 0)$ 的不稳定轨道一定收敛到 $(0, 0)$, 即这是一个连接 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$ 的异宿轨道。但在 $(0, 0)$ 是一个稳定螺旋时, 这一轨道的 v - 值可以是负的, 这不符合 v 的物理意义。而 $c \geq \sqrt{4ad}$ 时, v - 值恒为正。这样, 我们得到了

定理3.2. 对于任意 $c \geq \sqrt{4ad}$, 方程 (3.29) 存在唯一一个行波解 $u(t, x) = v(x - ct)$, 满足:

$$0 < v(z) < 1, \quad v'(z) < 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} v(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} v(z) = 0.$$

注记:

(i) 一般来说, 行波解不能以显式解出。Fisher-KPP 方程唯一可以显式解出的解为:

$$\text{当 } c = \frac{5}{\sqrt{6}} \text{ 时, } v(z) = \frac{1}{(1 + k \exp(-\frac{z}{\sqrt{6}}))^2}, \text{ 这里 } k \text{ 是任意正常数。} \quad (\text{Ablowitz, Zeppetella, 1979.})$$

(ii) 在以上的讨论中, 我们假设 $c > 0$, 从而得到单调递减的行波解从左向右传播。若假设 $c < 0$, 则我们可得到单调递增行波解从右向左传播。

(iii) $c = \sqrt{4ad}$ 称为最小波速 (minimal wave speed), 注意这和 3.2 节中线性方程的“行波解”一致。事实上, (Kolmogoroff, Petrovsky, Piscounoff, 1937) 证明了对于初值 $u_0(x) = 1, x \leq 0, u_0(x) = 0, x > 0$, 方程 (3.29) 的解收敛于一个速度为 $\sqrt{4ad}$ 的行波解, 即最小波速是物质传播的确实速度。

§3.5 第三章练习题

1. 求 $u_t = du_{xx}$ 的形如 $u(t, x) = v(\frac{x}{\sqrt{t}})$ 的解, 并从中导出扩散方程的基本解。
2. 考虑下列离散过程: 设从 $n = 0$ 时, 有一个粒子在 $x = 0$ 处。在每一时间单位, 这个粒子跳到左侧或右侧邻位的概率均为 p , 在原处不动的概率为 $1 - 2p$ 。试问在 n 步后, 粒子在 $x = m$ 的概率为多少, $-n \leq m \leq n$ 。这一概率分布与扩散方程的基本解有什么联系?

3. 考虑方程

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + au, & 0 < x < l\pi, \quad t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & 0 \leq x \leq l\pi, \\ ku(t, 0) - (1 - k)u_x(t, 0) = 0, \\ ku(t, l\pi) + (1 - k)u_x(t, l\pi) = 0. \end{cases}$$

求解 $u(t, x)$ 从无界到趋于 0 的分歧点 $a = a_0$, 并求出最小生存空间的大小 l 。

4. 求

$$\begin{cases} y'' + 2y' + ky = 0, & 0 < x < \pi, \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

的特征值, 特征函数。

5. Allen-Cahn 方程

$$u_t = du_{xx} + u(1 - u)(1 + u), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

有一个波速为 0 的行波解, 也成为“驻波解” (standing wave)。求 $d = 1$ 时的驻波解, 即 $u(x)$ 满足

$$u'' + u - u^3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(\pm\infty) = \pm 1.$$

6. 考虑具有 Allee 效应的反应扩散方程,

$$u_t = du_{xx} + u(1 - u)(u - a), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

这里 $0 < a < 1$ 。试分析方程行波解的存在唯一性, 并求出波速 c 。

7. 考虑以下扩散方程组

$$\begin{cases} u_t = du_{xx}, & t > 0, \ x \in (0, \infty), \\ v_t = dv_{xx}, & t > 0, \ x \in (0, \infty), \\ w_t = dw_{xx}, & t > 0, \ x \in (0, \infty), \\ u(t, 0) = v(t, 0) = w(t, 0), & t > 0, \\ u_x(t, 0) = v_x(t, 0) + w_x(t, 0), & t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \ v(0, x) = v_0(x), \ w(0, x) = w_0(x), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

试求方程的解析解 (或一些特殊解)。

第四章 反应扩散方程的分歧理论

§4.1 Banach 空间与可微性

我们回顾一些定义. 若 X 是一个线性空间 (linear space), 即对于任何 $x, y \in X$, 有 $x + y \in X$; 对于任何 $k \in \mathbb{R}$, $x \in X$, 有 $kx \in X$, 且存在一个函数 $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

- (i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$;
- (ii) $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

则 $(X, \|\cdot\|)$ 称为一个线性赋范空间 (normed linear space). $\|x\|$ 称为 x 的范数 (norm). 一个赋范空间称为完备的 (complete), 若空间中的任何 Cauchy 序列必有收敛子列. 一个完备的线性赋范空间称为 Banach 空间 (Banach space).

1. 若 X, Y 是两个 Banach 空间, $g: X \rightarrow Y$ 是一个映射 (map), 那么 g 被称为线性的 (linear), 若

- (i) 对于任何 $x, y \in X$, $g(x + y) = g(x) + g(y)$;
- (ii) 对于 $k \in \mathbb{R}$, $x \in X$, $g(kx) = kg(x)$.

从 X 到 Y 的线性映射集合记为 $L(X, Y)$;

2. 对于 $x_0 \in X$, g 在 x_0 是连续的 (continuous), 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|x - x_0\|_X < \delta$ 时, 有 $\|g(x) - g(x_0)\|_Y < \varepsilon$;
3. g 在 x_0 点是 Fréchet 可微的 (Fréchet differentiable), 若存在 $A \in L(X, Y)$, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\|x - x_0\|_X < \delta$ 时, 有 $\|g(x) - g(x_0) - A(x - x_0)\|_Y < \varepsilon$.

这里 $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$ 分别是 X 和 Y 的范数.

另一可微性定义是: g 在 x_0 点是 Gâteaux 可微 (Gâteaux differentiable), 若对于任何 $h \in X$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|g(x_0 + th) - g(x_0) - tA(h)\|_Y}{t} = 0.$$

若 g 是 Fréchet 可微的, 必是 Gâteaux 可微的. 在常见应用中, 两者区别不大. 更多可微性内容可参阅非线性泛函分析教材.

§4.2 函数空间

最常见的 Banach 空间是 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. 在有限维 Banach 空间上, 各种范数是等价的. 我们在偏微分方程研究中常用的函数空间都是 Banach 空间, 现列举如下: 若 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界区域且具有光滑边界,

1. $C^0(\bar{\Omega}) = \{f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ 在 } \bar{\Omega} \text{ 上每一点连续}\};$

2. $C^k(\bar{\Omega}) = \{f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, D^i f \in C^0(\bar{\Omega}), 0 \leq i \leq k\}$; 这里 $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ 或 $k = \infty$, $D^i f$ 是 f 的 i 阶混合偏导数. $C^k(\bar{\Omega})$ 的范数是

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{0 \leq i \leq k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^i f(x)|.$$

3. $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{f \in C^k(\bar{\Omega}), \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|D^k f(x) - D^k f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}$, $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 的范数是

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} + \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|D^k f(x) - D^k f(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 称为 Hölder 空间 (Hölder space).

对于形如

$$\Delta u = f \quad (4.1)$$

的方程, 我们有 Schauder 估计; 对于任何 $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, (4.1) 有唯一解 $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 且

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}, \quad (4.2)$$

这里 C 仅依赖于 Ω .

若 $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 定义 $\text{supp } f = \{x \in \bar{\Omega} : f(x) \neq 0\}$ 为 f 的支撑集 (support). 若 $\text{supp } f \subset \Omega$, 则称 f 具有紧支集 (compact support). 对于 $0 \leq k \leq \infty$, $0 \leq \alpha < 1$,

$$C_0^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{f \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) : \text{supp}(D^i f) \subset \Omega, 0 \leq i \leq k\}$$

4. $L^p(\Omega) = \{f \text{ Lebesgue 可积, 且 } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty\}$;
 $L^\infty(\Omega) = \{f \text{ Lebesgue 可积, 且 } |f(x)| < \infty \text{ 除一个零测集}\}$; 其范数分别为:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}; \quad \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{essmax}_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|.$$

对于 $u \in L^1(\Omega)$, 我们可以定义 u 的弱导数 (weak derivative), 若 $u, v \in L^1(\Omega)$, 对于任何 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega v \phi dx,$$

则称 v 是 u 对 x_i 的弱偏导数, $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

高阶导数可类似定义. 那么

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^i f \in L^p(\Omega), 0 \leq i \leq k\},$$

其范数为

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq i \leq k} \|D^i f\|_{L^p(\Omega)}.$$

可以证明 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是 $C^\infty(\Omega)$ 在范数 $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}$ 下的闭包, $W^{k,p}(\Omega)$ 是 C^∞ 在范数 $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ 下的闭包. 那么我们也可以定义 $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 和 $W^{k,p}(\Omega)$ 的子集; $C_0^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})}$ 下的闭包, $W_0^{k,p}(\Omega)$ 是 $W^{k,p}$ 在 $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ 下的闭包.

$W^{k,p}(\Omega)$, $W_0^{k,p}(\Omega)$ 都是 Sobolev 空间 (Sobolev space). 形如 (4.1) 的方程也可以在 Sobolev 空间框架下求解, 即 L^p 估计. 若 $p \geq 2$, 对于 $f \in L^p(\Omega)$, 存在唯一的 $u \in W^{2,p}(\Omega)$ 满足 (4.1) 且

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad (4.3)$$

对于 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.4)$$

同样的 Hölder 估计和 L^p 估计也满足, 且 $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, 则 $u \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$; $f \in L^p(\bar{\Omega})$, 则 $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{2,p}(\Omega)$.

最后我们有 Sobolev 嵌入定理:

1. 如果 $kp < n$, 那么 $W^{k,p}(\Omega)$ 紧嵌入到 $L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$;
2. 如果 $kp = n$, 那么 $W^{k,p}(\Omega)$ 紧嵌入到 $L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$;
3. 如果 $kp > n$, 那么 $W^{k,p}(\Omega)$ 紧嵌入到 $C^\alpha(\bar{\Omega})$, $1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$, 其中

$$\begin{cases} \alpha = k - \frac{n}{p}, & \text{如果 } k - \frac{n}{p} < 1; \\ \alpha \in [0, 1), & \text{如果 } k - \frac{n}{p} = 1; \\ \alpha = 1, & \text{如果 } k - \frac{n}{p} > 1. \end{cases}$$

一个常见结论是 Rellich 定理: $W_0^{1,2}(\Omega)$ 紧嵌入到 $L^2(\Omega)$.

我们也回顾: 若 $A \in L(X, Y)$, 对于任何有界集 $B \subset X$, $\overline{A(B)}$ 是紧的, 那么称 A 为从 X 到 Y 的紧算子; 一个等价定义为: 设 $A \in L(X, Y)$, 对于任意有界 X 中的点列 $\{x_n\}$, $\{A(x_n)\}$ 有 Y 中的收敛子列.

现在我们考虑映射 $F: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$, 这里 X 为 $C_0^{2,\alpha}(\Omega)$ 或者 $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, Y 为 $C^\alpha(\bar{\Omega})$ 或者 $L^p(\Omega)$, 定义为

$$F(\lambda, u) = \Delta u + \lambda f(u), \quad (4.5)$$

则 F 的一次和二次偏导数为

$$F_\lambda(\lambda, u)[\tau] = \tau f(u), \quad F_u(\lambda, u)[w] = \Delta w + \lambda f'(u)w,$$

$$F_{\lambda\lambda}[\tau_1, \tau_2] = 0, \quad F_{\lambda u}[\tau, w] = \tau f'(u)w, \quad F_{uu}[w_1, w_2] = \lambda f''(u)w_1 w_2.$$

注意对于 $g: X \rightarrow Y$, 二阶导数是 $L(X, L(X, Y))$ 的一个线性映射, 而

$$L(X, L(X, Y)) \cong L(X, X, Y)$$

所以二阶导数可以看成 X 上的一个双线性映射.

§4.3 隐函数定理与分歧定理

有了以上的预备知识, 我们可以介绍 Banach 空间中的隐函数定理和分歧定理.

定理4.1. 若 X, Y, Z 为 Banach 空间, $U \subset Z \times X$ 是 (λ_0, u_0) 的一个邻域. 设 $F: U \rightarrow Y$ 是一个连续可微映射, $F(\lambda_0, u_0) = 0$ 且 $F_u(\lambda_0, u_0)$ 是一个同胚映射, 即 $F_u(\lambda_0, u_0)$ 是单射和满射, 且 $F_u^{-1}(\lambda_0, u_0): Y \rightarrow X$ 是有界线性算子. 则存在 λ_0 在 Z 中的一个邻域 A , u_0 在 X 中一个邻域 B , 使得对于任何 $\lambda \in A$ 存在唯一 $u(\lambda) \in B$ 满足 $F(\lambda, u(\lambda)) = 0$ 且 $u(\cdot): A \rightarrow B$ 是连续可微的, $u'(\lambda_0): X \rightarrow Y$ 定义为

$$u'(\lambda_0)[\psi] = -[F_u(\lambda_0, u_0)]^{-1} F_\lambda(\lambda_0, u_0)[\psi].$$

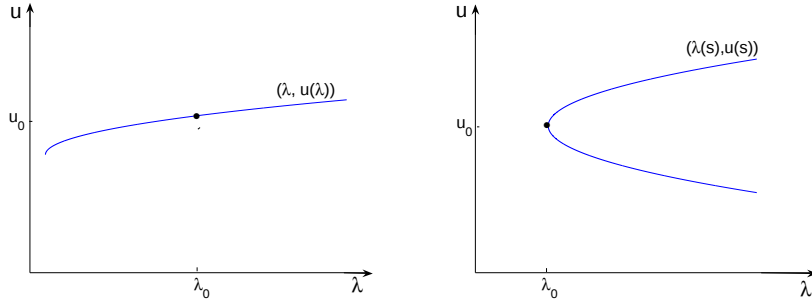


图 4.1 一个解附近的曲线结构 (左) 隐函数定理 (右) 鞍结点分歧.

隐函数定理说明一个方程的解若是非退化的 (即线性化算子是可逆的), 且 $Z = \mathbb{R}$, 则解的集合 $\{(\lambda, u)\}$ 是一条曲线, 可以被 λ 参数化. 那么我们下面考虑 $F_u(\lambda_0, u_0)$ 不可逆的情况. 方程是

$$F(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad u \in X, \quad (4.6)$$

这里 $F: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$, X 和 Y 是 Banach 空间. 我们假设 $F(\lambda_0, u_0) = 0$,

(F1) $\dim N(F_u(\lambda_0, u_0)) = \text{codim} R(F_u(\lambda_0, u_0)) = 1$, 且 $N(F_u(\lambda_0, u_0)) = \text{span}\{w_0\}$.

这里 $N(L)$ 和 $R(L)$ 分别是线性映射 $L: X \rightarrow Y$ 的零空间和值域. 因为 $R(F_u(\lambda_0, u_0))$ 余维数为 1, 则存在 Y 上的线性泛函 $l \in Y^*$ (Y 的对偶空间) 使得

$$u \in R(F_u(\lambda_0, u_0)) \text{ 当且仅当 } \langle l, u \rangle = 0,$$

这里 $\langle l, u \rangle$ 是 Y^* 和 Y 间的对偶关系. 那么我们有

定理4.2. (鞍结点分歧定理 Saddle-Node Bifurcation Theorem) 若 U 是 (λ_0, u_0) 在 $\mathbb{R} \times X$ 中的一个邻域, $F: U \rightarrow Y$ 是连续可微映射. $F(\lambda_0, u_0) = 0$, F 在 (λ_0, u_0) 满足 (F1) 和

(F2) $F_\lambda(\lambda_0, u_0) \notin R(F_u(\lambda_0, u_0))$.

则

- (1) 若 Z 是 $\text{span}\{w_0\}$ 在 X 中任意一个补空间, 那么 (4.6) 在 (λ_0, u_0) 附近的解形成一条曲线 $\{(\lambda(s), u(s)) = (\lambda(s), u_0 + sw_0 + z(s)) : |s| < \delta\}$, 其中 $s \mapsto (\lambda(s), z(s)) \in \mathbb{R} \times Z$ 是连续可微的, $\lambda(0) = \lambda_0$, $\lambda'(0) = 0$, $z(0) = z'(0) = 0$.

(2) 若 F 在 (λ_0, u_0) 附近对 u 二次可微, 则 $\lambda(s)$ 在 $\lambda = \lambda_0$ 二次可微, 且

$$\lambda''(0) = -\frac{\langle l, F_{uu}(\lambda_0, u_0)[w_0, w_0] \rangle}{\langle l, F_\lambda(\lambda_0, u_0) \rangle}.$$

本质上鞍结点分歧定理所展示的解集结构和隐函数定理类似, 都是曲线结构, 只是鞍结点定理中的曲线无法由 λ 参数化. 事实上若 $\lambda''(0) \neq 0$, 则对于 λ_0 的一个单侧邻域, (4.6) 在 (λ_0, u_0) 附近恰好有两个解. 若 F 还满足

$$(F4') \quad F_\lambda(\lambda_0, u_0) \notin R(F_u(\lambda_0, u_0)).$$

那么 $\lambda''(0) = 0$, F 在 (λ_0, u_0) 附近有一个尖点结构. 在进一步导数的条件下, 形如图 1.6 的尖点分歧会发生.

最后我们有以下的分歧定理.

定理4.3. (跨越或音叉分歧定理 Transcritical or Pitchfork Bifurcation Theorem) 若 U 是 $(\lambda_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X$ 的一个邻域, $F: U \rightarrow Y$ 是一个二次连续可微映射, 对于任何 $(\lambda, u_0) \in U$, $F(\lambda, u_0) = 0$. 在 (λ_0, u_0) , F 满足 (F1) 和

$$(F3) \quad F_{\lambda u}(\lambda_0, u_0)[w_0] \notin R(F_u(\lambda_0, u_0)).$$

设 Z 是 $\text{span}\{w_0\}$ 在 X 中的一个补空间, 则 (4.6) 在 (λ_0, u_0) 附近的解恰好为两条曲线: $u = u_0$ 和 $\{(\lambda(s), u(s)) = (\lambda(s), u_0 + sw_0 + z(s)) : s \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, $\lambda \mapsto (\lambda(s), z(s)) \in \mathbb{R} \times Z$ 是连续可微的, 使得 $\lambda(0) = \lambda_0$, $z(0) = z'(0) = 0$ 且

$$\lambda'(0) = -\frac{\langle l, F_{uu}(\lambda_0, u_0)[w_0, w_0] \rangle}{2\langle l, F_{\lambda u}(\lambda_0, u_0)[w_0] \rangle}. \quad (4.7)$$

若 (F4') 满足, 则 $\lambda'(0) = 0$. 这时如果 F 在 (λ_0, u_0) 附近三次可微, 则 $\lambda(s)$ 为二次可微, 且

$$\lambda''(0) = -\frac{\langle l, F_{uuu}(\lambda_0, u_0)[w_0, w_0, w_0] \rangle + 3\langle l, F_{uu}(\lambda_0, u_0)[w_0, \theta] \rangle}{3\langle l, F_{\lambda u}(\lambda_0, u_0)[w_0] \rangle},$$

其中 θ 满足

$$F_{uu}(\lambda_0, u_0)[w_0, w_0] + F_u(\lambda_0, u_0)[\theta] = 0.$$

在定理 4.3 中若 $\lambda'(0) \neq 0$, 那么一个跨越分歧发生; 若 $\lambda'(0) = 0$ 而 $\lambda''(0) \neq 0$, 那么一个音叉分歧发生. 但是两者共同之处为都有一条平凡解曲线与一条非平凡解曲线相交叉.

定理 4.2 和 4.3 给出了 1.2 节里分歧现象的精确描述. 这两个定理的这种形式首先在 70 年代 (Crandall-Rabinowitz, 1971, 1972) 中出现, 证明可参见上述文献或 (Shi, 2009). 我们更侧重于它们对反映扩散方程 (组) 的平衡解分歧的应用.

§4.4 单变元反应扩散方程的分歧

我们考虑以下形式的 Fisher-KPP 方程推广形式的平衡解方程:

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = au - uf(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.8)$$

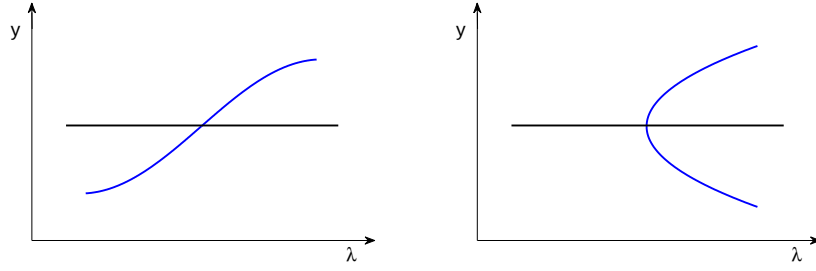


图 4.2 一个解附近解集结构 (左) 跨越分歧. (右) 音叉分歧.

在这里, $c(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $a > 0$, $f(u) \in C^2(\mathbb{R}^+)$ 满足 $f(0) = 0$, $f'(u) \geq 0$, 且 $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \infty$. 对于更一般的方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.9)$$

若 u 是 (4.9) 的解, 且 $f_u(x, u) \in C^0(\bar{\Omega})$, 则 u 对应于 (4.9) 的稳定性可以由下面的特征方程决定:

$$\begin{cases} -\Delta \phi - f_u(x, u)\phi = \mu \phi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.10)$$

由定理 3.1, (4.10) 有一列特征值 $\mu_i(u)$, 满足 $\mu_i(u) \leq \mu_{i+1}(u)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i(u) = \infty$. 如果 $\mu_1(u) > 0$, 我们称 u 是 (4.9) 的稳定解 (stable), 否则 u 是不稳定的 (unstable). 我们接下来叙述主要定理:

定理4.4. 考虑 (4.8), 定义 $a_0 = \lambda^c$ 为 $-\Delta + c(x)$ 的最小特征值 (见定理 3.1). 则:

- (1) 当 $a \leq a_0$ 时, (4.8) 的唯一非负解为 $u = 0$;
- (2) 当 $a > a_0$ 时, (4.8) 有唯一正解 $u_a(x)$ (除 $u = 0$ 外无其他非负解); 解集 $\{(a, u_a) : a > a_0\} \subset \mathbb{R} \times C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是连续可微曲线, 且 $u_a(x)$ 关于 a 严格递增, $u_a(x)$ 是 (4.8) 的稳定解.

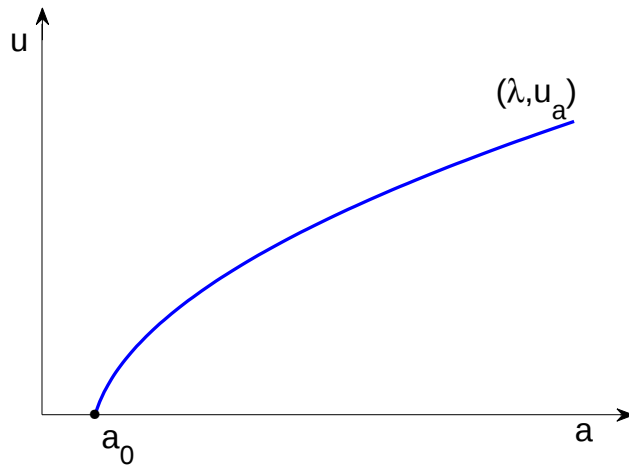


图 4.3 (4.8) 的分歧示意图

定理 4.4 有很多不同的证明方法 (Brezis-Kamin, 1992), 我们强调隐函数定理和分歧理论的使用。

证明: 第一步: 当 $a \leq a_0$ 时, (4.8) 的非负解必为 0。

由定理 3.1 可知,

$$\begin{cases} -\Delta\phi + c(x)\phi = \lambda\phi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.11)$$

有最小特征值 $\lambda_1^c (= a_0) \in \mathbb{R}$, 且相应的特征函数 $\phi_1(x) > 0$, $x \in \Omega$. 假设 u 是 (4.8) 的非负解, 将 (4.8) 乘以 ϕ_1 在 Ω 上积分, 同时将下述 ϕ_1 满足的方程乘以 u 在 Ω 上积分,

$$\begin{cases} -\Delta\phi_1 + c(x)\phi_1 = a_0\phi_1, & x \in \Omega, \\ \phi_1 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.12)$$

两积分相减, 根据 Green 公式:

$$\int_{\Omega} (\Delta u \cdot \phi_1 - \Delta \phi_1 \cdot u) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \phi_1 - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} u \right) dx = 0,$$

所以

$$a \int_{\Omega} u \phi_1 dx - \int_{\Omega} u f(u) \phi_1 dx = a_0 \int_{\Omega} u \phi_1 dx.$$

因为 $f(u) \geq 0$, $u \geq 0$, $\phi_1 > 0$, 所以 $a \geq a_0$, 且 $a = a_0$ 意味着 $u \equiv 0$.

第二步: $a = a_0$ 是一个跨越式分歧点。

$u = 0$ 是 (4.8) 的一个平凡解。我们定义 $F: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$,

$$F(a, u) = \Delta u - c(x)u + au - uf(u), \quad (4.13)$$

在这里, $u \in X \equiv C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$, 那么 F 是二次连续可微的, 且

$$F_u(a, 0)[\phi] = \Delta\phi - c(x)\phi + a\phi, \quad \phi \in X. \quad (4.14)$$

在 $a = a_0$ 时, $F_u(a, 0)[\phi] = 0$ 有唯一解 $\phi_1 > 0$ (不考虑常数系数), 因此 $\dim N(F_u(a, 0)) = 1$, $\text{span} N(F_u(a, 0)) = \{\phi_1\}$, 若 $h \in R(F_u(a, 0))$, 则存在 $v \in X$ 使得

$$\Delta v - c(x)v + a_0 v = h, \quad (4.15)$$

在 (4.15) 的两端乘以 ϕ_1 积分得 $\int_{\Omega} h \phi_1 dx = 0$. 另一方面由 Fredholm 理论知, 若 $\int_{\Omega} h \phi_1 dx = 0$, 则 (4.15) 有解 v . 所以 $R(F_u(a, 0)) = \{h \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}) : \int_{\Omega} h \phi_1 dx = 0\}$, 因此 F 满足 (F1). 最后我们验证 (F3), $F_{\lambda u}(a_0, 0)[\phi_1] \notin R(F_u(a, 0))$, 因为 $\int_{\Omega} \phi_1 \cdot \phi_1 dx \neq 0$, 所以我们可应用定理 4.3 得 $F(a, u) = 0$ 在 $(a_0, 0)$ 附近的解集为 $\{(a, 0) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{(a(s), u(s)) : |s| < \delta\}$ 使得 $a(0) = a_0$, $u(s) = s\phi_1 + sz(s)$, $z(0) = 0$, 且 $a'(0) = \frac{\int_{\Omega} f'(0)\phi_1^3 dx}{2 \int_{\Omega} \phi_1^2 dx} > 0$. 注意定理 4.3 中的泛函 $\langle \ell, \psi \rangle = \int_{\Omega} \phi_1 \psi dx$, 而 $F_{uu}(a_0, 0)[\psi_1, \psi_2] = f'(0)\psi_1 \psi_2$. 这样当 $0 < s < \delta$ 时, $a(s) > a_0$, 而 $u(s) = s\phi_1 + sz(s) > 0$, 因为 $z(0) = 0$ (必要时取小一些的 δ). 因此一个跨越式分歧在 $a = a_0$ 发生, 若 $s \in (0, \delta)$ ($\lambda(s) > a_0$), $u(s)$ 是正解, 若 $s \in (-\delta, 0)$ ($\lambda(s) < a_0$), $u(s)$ 是负解。

第三步: (4.8) 的任何正解是稳定的。

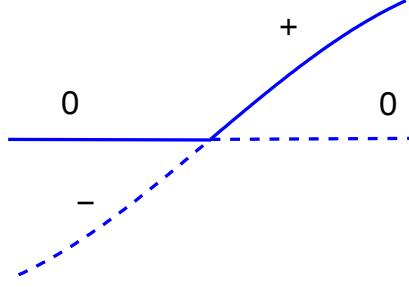


图 4.4 在 $(a, u) = (a_0, 0)$ 附近的跨越分支

我们注意若 u 是 (4.8) 的非负解, 则在 Ω 上 $u \equiv 0$ 或 $u > 0$. 这可由椭圆方程极值原理证明 (见第五章). 若 u 是 (4.8) 的正解, 则 u 是下列特征方程

$$\begin{cases} -\Delta\psi + c(x)\psi = a\psi - f(u)\psi + \mu\psi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.16)$$

的一个特征函数使 $\mu = 0$. 因为第一特征值是唯一具有正特征函数的特征值, 所以 (4.16) 的第一特征值 $\mu_1^* = 0$. 再考虑 (4.8) 的线性化方程, 这里 u 是 (4.8) 的一个正解,

$$\begin{cases} -\Delta\psi + c(x)\psi = a\psi - f(u)\psi - f'(u)u\psi + \mu\psi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.17)$$

由定理 3.1, (4.17) 的第一个特征值 μ_1^{**} 满足

$$\begin{aligned} \mu_1^{**} &= \min_{\psi \in W_0^{1,2}(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 + c(x)\psi^2 - a\psi^2 + f(u)\psi^2 + f'(u)u\psi^2) dx}{\int_{\Omega} \psi^2 dx} \\ &\geq \min_{\psi \in W_0^{1,2}(\Omega), \psi \neq 0} \frac{\int_{\Omega} (|\nabla\psi|^2 + c(x)\psi^2 - a\psi^2 + f(u)\psi^2) dx}{\int_{\Omega} \psi^2 dx}, \\ &= \mu_1^* = 0, \end{aligned}$$

因此正解 u 是稳定的。

第四步: 对于任何 $a_1 > a_0$, 所有 (4.8) 的正解对于 $a \in [a_0, a_1]$ 是一致有界的。

注意 u 满足 $-\Delta u = u(a - c(x) - f(u))$, $x \in \Omega$. 由假设 $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \infty$ 可得对于 $a \in [a_0, a_1]$, 存在 $u_1 > 0$ 使得 $u > u_1$ 时 $f(u) > a_1 + \|c(x)\|_{C^0(\bar{\Omega})}$. 那么在 $a \in [a_0, a_1]$ 时正解 u 满足 $0 < u(x) \leq u_1$. 否则 $\max_{x \in \Omega} u(x) = u(x_1) > u_1$, 则 $-\Delta u(x_1) < 0$, 这与 u 在 x_1 处达到最大值矛盾。

第五步: 结束证明。

由第二步知, 当 $a \in (a_0, a_0 + \delta)$ 时, (4.8) 有一个正解从 0 解分歧产生. 由第三步知任何正解是稳定的, 因此非退化, 即 $F_u(a, u)$ 是可逆的. 因此在任何正解 (a, u) 附近, 根据定理 4.1, 解集结构是一条光滑曲线。

定义 Σ 为 (4.8) 的正解集合, 即 $\Sigma = \{(a, u) : a > a_0, (a, u) \text{ 是 (4.8) 的解}\}$. 令 Σ_1 为 Σ 的包含第二步中分歧曲线的连通分支, 定义 $a_2 = \sup\{a > a_0 : \text{存在 (4.8) 的解 } (a, u) \text{ 在 } \Sigma_1 \text{ 上}\}$. 则 $\Sigma_1 = \{(a, u_a) : a_0 < a < a_2\}$ 是一条光滑曲线, 因为 Σ_1 局部在每一点 (a, u_a) 都是光滑曲线. 我们证明 u_a 关于 a 单增. 事实上, 在 (4.8) 中对 a 求导得:

$$\begin{cases} -\Delta \frac{\partial u_a}{\partial a} + c(x) \frac{\partial u_a}{\partial a} = a \frac{\partial u_a}{\partial a} - f(u_a) \frac{\partial u_a}{\partial a} - f'(u_a) u_a \frac{\partial u_a}{\partial a} + u_a = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_a}{\partial a} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

或者简单的说, $L(\frac{\partial u_a}{\partial a}) = u_a$, L 是 (4.17) 中使 $L\psi = \mu\psi$ 的映射. 从第三步知 L 的第一特征值 $\mu_1^{**} > 0$, 则由后面会证明的极值原理可知 $\frac{\partial u_a}{\partial a} > 0$, 因为 $u_a > 0$. 若 $a_2 < \infty$, $\lim_{a \rightarrow a_2^-} u_a(x) = u_*(x)$ 存在, 又因为第四步, $u_*(x)$ 是有界的. 有前面的 Schauder 估计可证明 $u_* \in C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 那么 (a_2, u_*) 是 $a = a_2$ 的一个解, $u_* > 0$. 那么由隐函数定理 (定理 4.1), (a_2, u_*) 也在 Σ_1 上且可被继续延至 $a_2 + \delta_2 > a_2$. 这与 a_2 的定义矛盾, 因此 $a_2 = \infty$. 最后若 (4.8) 有除了 Σ_1 以外的解 (a, u_a) , $a > a_0$, 仍可以用隐函数定理证明 (a, u_a) 属于一条光滑曲线 Σ_2 , Σ_2 可被延至 $a \in (a_0, \infty)$, 但 (4.8) 在 $a = a_0$ 处仅有 0 解, 所以 Σ_2 必与 Σ_1 重合. 所以 $\Sigma = \Sigma_1 = \{(a, u_a) : a > a_0\}$ 是一条光滑曲线, 至此定理 4.4 证毕.

注记:

- (1) 为了简化证明, 我们假设 $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$. 实际上在证明中我们只需要 f 在 $u = 0$ 二次可微即可使用定理 4.3. 我们使用的定理 4.3 也比 (Crandall-Rabinowitz, 1971) 的版本条件略强, 那里只假设 F 是一次连续可微, $F_{\lambda u}$ 在 (λ_0, u_0) 存在即可, 但是那样不能得出非平凡解曲线是 C^1 的, 也就没有 (4.7). 若使用这个条件较弱的跨越分歧定理, 只需 $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$, 我们仍可以证明定理 4.4 (除了关于曲线在 $a = a_0$ 的光滑性), 因为隐函数定理的使用仅需要 $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$. 在这一条件下, Σ_1 在除 $a = a_0$ 外其他点仍是光滑的. 最后, 甚至只假设 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}_+)$, $0 < \alpha < 1$, 我们仍可得到同样的 $\Sigma_1 \subset \mathbb{R} \times C_0^{2,\beta}(\bar{\Omega})$, $0 < \beta < \alpha$. 但是此时 Σ_1 仅为连续曲线, 解的存在性需要用变分法或单调方法证明, 唯一性也需要用其他方法.
- (2) 定理 4.4 的应用十分广泛. 一个应用可见 4.5 节中对竞争或捕食模型的平衡解分歧的讨论. 另一个应用时对 Fisher-KPP 方程:

$$\begin{cases} \Delta u + au - uf(u) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

或者

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda ug(u) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.18)$$

这里 $ug(u)$ 是一个在 1.4 节中定义的广义 Logistic 增长模式, 即 $g(0) > 0$, $g(u)$ 单调递减, 存在 $u_0 > 0$ 使 $g(u_0) = 0$ 或 $g(u) > 0$, $u \in (0, \infty)$ 而 $\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) = 0$. 例如 $g(u) = 1 - u$ (Logistic), $g(u) = -1 + \frac{b}{(1+au)^p}$, $(a, p > 0, b > 1)$ (Hassell, Beventon-Holt), $g(u) = -1 + ae^{-u}$, $(a > 1)$ (Ricker, Nicholson's blowflies), $g(u) = \frac{1-u}{1+cu}$, $(c > 0)$ (食物有限, food-limited) 等等. 注意 (4.18) 并不与 (4.8) 等价, 因为参数 λ 涵盖整个非线性项, 但定理 4.4 的证明完全可以照搬到 (4.18), 只有几个小改动即可. 具体细节留作练习.

定理4.5. 考虑 (4.18), 设 $g \in C^1(\bar{\mathbb{R}}^+)$, $g(0) > 0$, g 在 $(0, M)$ 上递减, $g(M) = 0$. 则令 $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{g(0)}$, 这里 λ_1 是 (3.17) 的第一特征值, 那么

- (1) 当 $\lambda < \lambda_0$ 时, (4.18) 的唯一非负解为 $u = 0$;
- (2) 当 $\lambda > \lambda_0$ 时, (4.18) 有唯一正解 $u_\lambda(x)$ (除 0 外无其他非负解); 解集 $\{(\lambda, u_\lambda) : \lambda > \lambda_0\} \subset \mathbb{R} \times C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是连续可微曲线, 且 u_λ 关于 λ 严格递增, $u_\lambda(x)$ 是 (4.18) 的稳定解, 对所有的 $\lambda > \lambda_0$, $\|u_\lambda\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq M$.

§4.5 带扩散的竞争模型中的分歧

在 2.5 节中的 Lotka-Volterra 竞争模型可扩展为下述反应扩散方程组:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + u(1 - u - Av), & t > 0, x \in \Omega, \\ v_t = d_2 \Delta v + v(B - Cu - v), & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t, x) = v(t, x), & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, v(0, x) = v_0(x) \geq 0 & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.19)$$

这里 $u(t, x)$, $v(t, x)$ 是两个竞争对手在区域 Ω 上的密度函数, 区域 (栖息地) Ω 的边界是不友好的 (hostile), 因此有 Dirichlet 边值. 这里我们只限讨论 (4.19) 的平衡解. 令 $\lambda = d_1^{-1}$, $\mu = d_2^{-1}$, 则 (4.19) 的平衡解满足

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u(1 - u - Av) = 0, & x \in \Omega, \\ \Delta v + \mu v(B - Cu - v) = 0, & x \in \Omega, \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.20)$$

(4.20) 有以下明显的平衡解: $(0, 0)$, $(u, 0)$ 型, $(0, v)$ 型. 这里 $(u, 0)$ 型满足 $v = 0$, u 满足

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u(1 - u) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.21)$$

那么根据定理 4.5, 方程 (4.21) 在 $\lambda > \lambda_1$ 时有唯一正解 u_λ , $\{(\lambda, u_\lambda, 0) : \lambda > \lambda_1\}$ 是 (4.20) 的半平凡解 (semi-trivial solution) 曲线. 类似的, $(0, v)$ 型解中的 v 满足

$$\begin{cases} \Delta v + \mu v(B - v) = 0, & x \in \Omega, \\ v = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.22)$$

从而在 $\mu > \lambda_1/B$ 时有唯一正解 $v_{\mu, B}$, 因此 $\{(\mu, 0, v_{\mu, B}) : \mu > \lambda_1/B\}$ 是 (4.20) 的另一半平凡解曲线. 下面的分析我们以 λ 为主要分歧参数. 因此对于 $\lambda \in \mathbb{R}$, (4.20) 在 $\lambda < \lambda_1$ 时有两个平衡解 $(0, 0)$, $(0, v_{\mu, B})$ (若 $\mu > \lambda_1/B$), 在 $\lambda > \lambda_1$ 时除这两个外还有 $(u_\lambda, 0)$. 半平凡解的示意图见图 4.5.

为了下面的讨论, 我们从定理 3.1 回忆 $\lambda_1(c)$ 是 (3.17) 的第一特征值, 由 Courant-Fischer 变分原理, 若 $c_1(x) \geq c_2(x)$ 则 $\lambda_1(c_1) \geq \lambda_1(c_2)$ 且若在一个非负测度集上 $c_1(x) > c_2(x)$, 则 $\lambda_1(c_1) > \lambda_1(c_2)$. 我们现在考虑半平凡解对于 (4.20) 的稳定性. 更一般来说, 对于

$$\begin{cases} \Delta u + f(u, v) = 0, & x \in \Omega, \\ \Delta v + g(u, v) = 0, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.23)$$

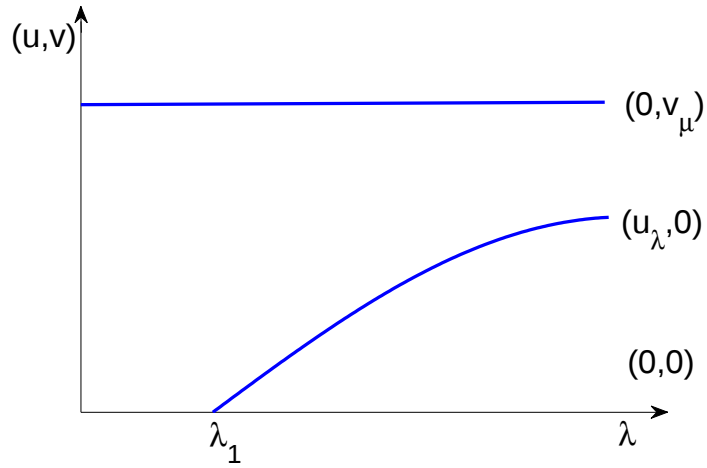


图 4.5 (4.20) 的半平凡解示意图

其线性化特征方程为

$$\begin{cases} \Delta\phi + f_u\phi + f_v\psi = -\eta\phi, & x \in \Omega, \\ \Delta\psi + g_u\phi + g_v\psi = -\eta\psi, & x \in \Omega, \\ \phi = \psi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.24)$$

若 (4.24) 所有特征值 η 都具有正实部, 则解 (u, v) 是稳定的, 否则是不稳定的.

应用到 (4.20), 我们有

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda(1 - 2u - Av)\phi - \lambda Au\psi = -\eta\phi, & x \in \Omega, \\ \Delta\psi + \mu(B - Cu - 2v)\psi - \mu Cv\phi = -\eta\psi, & x \in \Omega, \\ \phi = \psi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.25)$$

当 $(u, v) = (u_\lambda, 0)$ 时, (4.25) 变为

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda(1 - 2u_\lambda)\phi - \lambda Au_\lambda\psi = -\eta\phi, & x \in \Omega, \\ \Delta\psi + \mu(B - Cu_\lambda)\psi = -\eta\psi, & x \in \Omega, \\ \phi = \psi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

那么第二个方程说明 $\eta_i = \lambda_i(\mu(Cu_\lambda - B))$, 因为 $\psi > 0$ 所以 $\eta_1 = \lambda_1(\mu(Cu_\lambda - B))$. 由定理 4.5, u_λ 在 $\lambda \in (\lambda_1, \infty)$ 上单调递增, 因此 $\eta_1 = h(\lambda)$ 单调递增, 满足

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1^-} h_1(\lambda) &= \lambda_1(-\mu B) = -\mu B + \lambda_1 < 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h_1(\lambda) &= \lambda_1(\mu(C - B)) = -\mu B + \mu C + \lambda_1. \end{aligned}$$

注意若 (η_1, ψ_1) 由第二个方程求出, 则 ϕ_1 可由第一个方程解出. 那么 $(u_\lambda, 0)$ 的稳定性有以下可能:

1. 若 $\mu < \frac{\lambda_1}{B}$, 则 $(u_\lambda, 0)$ 对于任意 $\lambda > \lambda_1$ 是稳定的;

2. 若 $\mu > \frac{\lambda_1}{B}$ 且 $C > B$, 或 $\frac{\lambda_1}{B} < \mu < \frac{\lambda_1}{B-C}$ 且 $C < B$, 则存在唯一 $\lambda_* > \lambda_1$ 使得 $(u_\lambda, 0)$ 对于 $\lambda_1 < \lambda < \lambda_*$ 是不稳定的, 对于 $\lambda > \lambda_*$ 是稳定的;
3. 若 $\mu > \frac{\lambda_1}{B-C}$ 且 $C < B$, 则 $(u_\lambda, 0)$ 对于任意 $\lambda > \lambda_1$ 是不稳定的.

同理当 $(u, v) = (0, v_{\mu, B})$ 时, 稳定性由方程

$$\begin{cases} \Delta \phi + (\lambda - \lambda A v_{\mu, B}) \phi = -\eta \phi, & x \in \Omega, \\ \phi = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

决定, 那么 $\eta_1 = \lambda_1(\lambda A v_{\mu, B} - \lambda) \equiv h_2(\lambda) = \lambda_1 + \lambda(AK - 1)$, 这里 $K = K(\mu, B) = \max \frac{\int_{\Omega} v_{\mu, B} \phi^2 dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}$. $h_2(0) = \lambda_1 > 0$, 因此 $h_2(\lambda)$ 的单调性取决于是否 $K(\mu, B) > A^{-1}$. 容易知道 $K(\mu, B)$ 关于 μ 和 B 都是递增的, 因此

1. 当 $K(\mu, B) > A^{-1}$, $(0, v_\mu)$ 总是稳定的;
2. 当 $K(\mu, B) < A^{-1}$, 则存在唯一 $\lambda^* > 0$ 使得 $(u_\lambda, 0)$ 对于 $0 < \lambda < \lambda^*$ 是稳定的, 对于 $\lambda > \lambda^*$ 是不稳定的.

待加

§4.6 Turing 不稳定性 and 分歧

待加

§4.7 第四章习题

1. 证明: $n : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, $n(f) = \int_{\Omega} |f|^p dx$, 当 $p > 1$ 时是 Frechet 可微的, 并求出其导数. 这里 $\Omega \subset \mathbb{R}$ 是有界光滑区域.
2. (1). 试找到一个函数 $f \in C^{1,\alpha}([0, 1])$, $\alpha \in (0, 1)$, 但不属于 $C^2([0, 1])$;
(2). 试找到一个函数 $f \in W^{1,2}((0, 1))$, 但是 $f \notin C^1([0, 1])$.
3. 设 $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$, 定义 $F : C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\alpha(\bar{\Omega})$ 为

$$F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{div}(v \nabla u + f(u)) \\ \operatorname{div}(\nabla g(v)) \end{pmatrix},$$

试求 $F_{(u,v)} \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}$ 和 $F_{(u,v)(u,v)} \left(\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \right)$, 即 F 对 (u, v) 的一阶和二阶偏导数.

4. 考虑带有 Holling II 型捕获项的反应扩散方程的平衡解方程:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda(u - u^2 - \frac{au}{1+u}) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

这里 $\lambda > 0$, $0 < a < 1$, Ω 是一个有界光滑区域, 找到正解从 $u = 0$ 分歧出来的分歧点 λ 并决定其分歧方向。

5. 考虑带漂流项的反应扩散方程:

$$\begin{cases} u'' + 2u' + \lambda u(1 - u) = 0, & x \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

证明: 存在 $\lambda_0 > 0$ 使得方程在 $\lambda \leq \lambda_0$ 时无正解, 而在 $\lambda > \lambda_0$ 时有唯一正解 u_λ , 且 $\{(\lambda, u_\lambda) : \lambda > \lambda_0\}$ 是 $\mathbb{R} \times C^2([0, \pi])$ 中一条光滑曲线。

6. 考虑以下“对称的”捕食模型平衡解方程:

$$\begin{cases} u'' + au - buv = 0, & 0 < x < \pi, \\ v'' + buv - av = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \quad v(0) = v(\pi) = 0, \end{cases}$$

其中 $a, b > 0$ 。

(1). 讨论常微分方程组: $u' = au - buv$, $v' = buv - av$ 的相图。

(2). 找到方程组所有平凡解, 半平凡解。

(3). 运用线性变换: $w = u + v$, $z = u - v$, 将方程组化为一个新方程组, 并证明新方程组等价于一个的四阶常微分方程。

(4). 运用极值原理 (第五章) 推导出方程组正解的界。

(5). 运用分歧理论或其他方法进一步研究此方程组 (或与之等价的四阶微分方程)。

7. 考虑 $u_t = u_{xx} + f(u)$, $t > 0, x \in \mathbb{R}$, 这里 $f(u) = \begin{cases} u, & 0 < u < \frac{1}{2}, \\ 1 - u, & \frac{1}{2} < u < 1 \end{cases}$, 即“帐篷函数”(tent function),

求方程行波解的确切公式。

第五章 比较方法

§5.1 椭圆方程的极值原理

一个简单的微积分练习题是这样的：若 $f \in C^0([a, b]) \cap C^2((a, b))$, $f(a) \geq 0$, $f(b) \geq 0$, $f''(x)$ 在 (a, b) 上为负, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上大于 0. 这就是二阶椭圆方程的**极值原理 (maximum principle)**的雏形。极值原理是线性和非线性偏微分方程的一个重要工具。

为了简化叙述和证明, 我们仅在此考虑线性微分算子 $L_c = -\Delta + c(x)$. 很多结果可以推广到更一般的二阶甚至高阶椭圆型微分算子。下面的极值原理是大多数偏微分方程教材中有的, 我们这里只是引用而不证明, 具体证明见 (Evans, 1998), (Gilbarg-Trudinger, 1983), (Han-Lin, 1997).

定理5.1. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中一有界连通开集, $n \geq 2$, 定义

$$L_c u = -\Delta u + c(x)u, \quad u \in C^2(\Omega), \quad (5.1)$$

这里 $c(x) \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq 0$, $x \in \Omega$. 若对于 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$,

$$\begin{cases} L_c u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) \geq 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.2)$$

则下列结论成立:

- (1) (弱极值原理) $u(x) \geq 0$, $x \in \Omega$;
- (2) (强极值原理) 若存在 $x_* \in \Omega$ 使得 $u(x_*) = 0$, 则 $u(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$;
- (3) (Hopf 边界引理) 若存在一个球 $B_r \supset \Omega$ 使得 $x_* \in \partial B_r \cap \partial\Omega$, 且对于任何 $x \in B_r$, $u(x) > u(x_*)$, 那么对于任何满足 $\nu \cdot n(x_*) > 0$ 的方向 ($n(x_*)$ 是 x_* 关于 ∂B_r 的单位外法向), $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_*) - u(x_* - t\nu)}{t} < 0$;
若 $u \in C^1(\bar{\Omega})$, 则 $\frac{\partial u}{\partial n}(x_*) < 0$.

$c(x)$ 是正函数这一条件在应用中限制很大, 下面我们来看一些情况下这一限制是不需要的。下面的定理说明: 只要弱极值原理成立, 那么强极值原理和 Hopf 边界引理也都成立, 而这不依赖于 $c(x)$ 的符号。

定理5.2. 若 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 满足 (5.2), 且 $u(x) \geq 0$, $x \in \Omega$, 则:

- (1) 下列两者之一必成立: $u(x) > 0$, $x \in \Omega$ 或 $u \equiv 0$, $x \in \Omega$;
- (2) 若 $u(x) > 0$, $x \in \Omega$, 边界 $\partial\Omega$ 是 $C^{2,\alpha}$ 的, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, 存在 $x_* \in \partial\Omega$ 使得 $u(x_*) = 0$, 那么 $\frac{\partial u}{\partial n}(x_*) < 0$.

证明: 将 $c(x)$ 分解为正部和负部 $c(x) = c^+(x) - c^-(x)$. 那么 $-\Delta u + c^+(x)u \geq c^-(x)u \geq 0$, $x \in \Omega$. 那么根据定理 5.1 的 (2) 和 (3), 定理中所述结果成立。注意若 $\partial\Omega$ 是 $C^{2,\alpha}$ 的, 则 Hopf 边界引理中的内部球条件就在每个边界点成立。

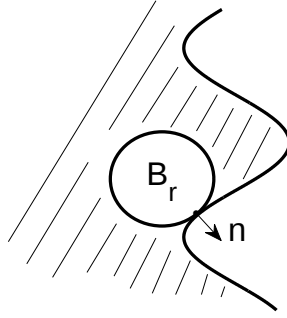


图 5.1 Hopf 边界引理示意图

因为定理 5.2 的结论, 我们无需区别弱, 强极值原理及 Hopf 边界引理, 因此若 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 满足 (5.2), 则有 $u(x) \geq 0$, $x \in \Omega$, 我们称 L_c 在 Ω 上满足极值原理。现在我们证明一个比定理 5.1 改进了的极值原理:

定理 5.3. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) 中的一个有界连通开子集, 边界 $\partial\Omega$ 是 $C^{2,\alpha}$ 的, 那么若 $\lambda_1(c) > 0$, 则极值原理成立。若 $\lambda_1(c) = 0$, 且存在 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 满足 (5.2), 则 $u = c\phi_1$, 这里 ϕ_1 是对应 $\lambda_1(c)$ 的特征函数。

证明: 先假设 $\lambda_1(c) > 0$. 若极值原理不成立, 那么存在 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 满足 (5.2), 但是存在 $x \in \Omega$ 使得 $u(x) < 0$. 那么取集合 $\{x \in \Omega : u(x) < 0\}$ 的一个连通分支 Ω_1 . 令 ϕ_1 是 L_c 在 Ω 上对应 $\lambda_1(c)$ 的特征函数。在 Ω_1 上对 $\phi_1 L_c u - u L_c \phi_1$ 积分, 并利用 Green 公式, 我们得到:

$$-\int_{\partial\Omega_1} \phi_1 \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{\Omega_1} (\phi_1 L_c u - \lambda_1(c) u \phi_1) dx. \quad (5.3)$$

那么因为 $\phi_1 > 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$, 则 (5.3) 左端 ≤ 0 , 而由 $\phi_1 > 0$, $L_c u > 0$, $\lambda_1(c) > 0$ 且 $u < 0$ 知 (5.3) 右端为正。这样得到一个矛盾, 因此极值原理成立。

现在我们假设 $\lambda_1(c) = 0$, 那么前面的证明仍然可以得到 (5.3). 等式成立的条件是 $u = \frac{\partial u}{\partial n}$ 在 Ω_1 上恒为 0, 且 $L_c u$ 在 Ω_1 上恒为 0. 这样由定理 3.1 中的 Courant-Fischer 变分公式, $\lambda_1(c, \Omega) \leq \lambda_1(c, \Omega_1) \leq 0$, 而假设 $\lambda_1(c) = 0$ 可得 $\lambda_1(c, \Omega) = \lambda_1(c, \Omega_1) = 0$. 但是这样说明 L_c 在 Ω 上有特征函数形为 $\phi > 0$, $x \in \Omega_1$, $\phi = 0$, $x \in \Omega \setminus \Omega_1$, 这与定理 3.1 中正特征函数的唯一性矛盾。因此 $u > 0$, 而 (5.3) 对 $\Omega = \Omega_1$ 仍成立说明 $L_c u \equiv 0$, $x \in \Omega$, 即 $u = c\phi_1$.

我们可以看到定理 5.3 中要求 $\lambda_1(c) > 0$ 比定理 5.1 中要求 $c(x) \geq 0$ 的条件要弱。我们以下的例子来给出定理 5.3 的一个应用, 也补充了定理 4.4 证明中的一个步骤。

例 5.1. 回顾定理 4.4 中的方程 (4.8). 在定理 4.4 的证明第三步中, 对于任何 (4.8) 的正解我们证明了 $\lambda_1(c) > 0$, 这时线性算子为 $L_* = -\Delta + c - a + f(u) + f'(u)u$. 在证明的第五步中, 我们得到 $L_*(\frac{\partial u_a}{\partial a}) \geq 0$, $x \in \Omega$, $\frac{\partial u_a}{\partial a} = 0$, $x \in \partial\Omega$. 那么现在根据定理 5.3, 由 $\lambda_1 > 0$ 可得 $\frac{\partial u_a}{\partial a} \geq 0$, $x \in \Omega$.

现在我们把极值原理应用到非线性椭圆型方程。

定理5.4. 设 $f \in C^0(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 满足下述方程:

$$\begin{cases} \Delta u + f(x, u(x)) \geq 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

若 $u(x_0) = \max_{x \in \Omega} u(x)$, 则 $f(x_0, u(x_0)) \geq 0$.

证明: 先假设 $x_0 \in \Omega$, 那么因为 x_0 是 $u(x)$ 的极大值点, 则 $\Delta u(x) \leq 0$, 所以由 $\Delta u + f(x, u) \geq 0$ 可得 $f(x_0, u(x_0)) \geq 0$. 再假设 $x_0 \in \partial\Omega$, 我们可以反证法证明. 若 $f(x_0, u(x_0)) < 0$, 则由 $\partial\Omega$ 的光滑性可知存在一个球 $B_r \subset \Omega$, 且 $\partial B_r \cap \partial\Omega = \{x_0\}$. 而由 f 的连续性, $f(x, u(x))$ 在 Ω 内为负. 这样 $\Delta u(x) > 0$, 且 $u(x) \leq u(x_0)$, $x \in B_r$, 那么由定理 5.1 (3), $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$, 这与定理假设矛盾, 因此 $x_0 \in \partial\Omega$ 也有 $f(x_0, u(x_0)) \geq 0$.

我们注意到定理 5.4 可用于 Neumann 边值问题 ($\frac{\partial u}{\partial n} = 0$), 或 Dirichlet 边值问题的正解 ($\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0$).

§5.2 先验估计

我们利用 5.1 节中的极值原理可对反应扩散方程和方程组的平衡解作出先验估计 (a priori estimate).

例5.2. 考虑以下平衡解方程:

$$\begin{cases} \Delta u + f(u(x)) = 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.4)$$

这里 $f \in C^\alpha(\mathbb{R}_+)$, $\alpha \in (0, 1)$, 若 $u > M$, $f(u) < 0$. 则对于 (5.4) 的任何非负解 u , 以下两者之一必成立: (1) $u \equiv (x) = 0$, $x \in \Omega$; (2) $0 < u < M$, $x \in \Omega$. 这可以由定理 5.2 和定理 5.4 证明. 注意定理 5.4 只证明了 $u(x) \leq M$, 但强极大值原理可证 $u(x) < M$.

例5.3. 考虑以下 Neumann 问题:

$$\begin{cases} \Delta u + f(u(x)) = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.5)$$

若 $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \in (0, 1)$, 且 f 为递减函数. 那么 (5.5) 的解必为常数. 这可以这样证明: 若 u 是 (5.5) 的任意解, 则方程在 Ω 上积分得:

$$0 = \int_{\Omega} (\Delta u + f(u)) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{\Omega} f(u(x)) dx = \int_{\Omega} f(u(x)) dx,$$

因此若 $u(x)$ 不是常数, $f(u(x))$ 在 Ω 上必然变号. 而 $f(u)$ 为递减函数, 因此至多有一个零 * 点 $^*u_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(u_0) = 0$, 而 $f(u)(u - u_0) < 0$, $u \neq 0$, 那么 $u(x_1) = \max_{x \in \Omega} u(x) > u_0$, 但 $f(u(x_1)) < 0$, 这与定理 5.4 矛盾. 因此 $u(x)$ 只能是常数解.

例5.4. 考虑 *Lenyel-Epstein CIMA* 化学反应的平衡解方程:

$$\begin{cases} \Delta u + a - u - \frac{4uv}{1+u^2} = 0, & x \in \Omega \\ \Delta v + u - \frac{uv}{1+u^2} = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.6)$$

我们证明：若 $(u(x), v(x))$ 是 (5.6) 的正解，则

$$\frac{a}{5+4a^2} < u(x) < a, \quad 1 + \left(\frac{a}{5+4a^2}\right)^2 < v(x) < 1+a^2, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

令 $u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$ ，那么由定理 5.4 得：

$$a - u(x_0) - \frac{4u(x_0)v(x_0)}{1+u^2(x_0)} \geq 0,$$

这样 $u(x_0) < a$ ，且 $1+u^2(x) < 1+a^2$ 。令 $v(x_1) = \max_{x \in \bar{\Omega}} v(x)$ ，那么由定理 5.4 得：

$$u(x_1) - \frac{u(x_1)v(x_1)}{1+u^2(x_1)} \geq 0,$$

所以 $v(x) \leq 1+u^2(x_1) < 1+a^2$ 。令 $u(x_2) = \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$ ，那么由定理 5.4 (应用到 $-u$) 得：

$$a - u(x_2) - \frac{4u(x_2)v(x_2)}{1+u^2(x_2)} \leq 0,$$

因此

$$a < u(x_2) \left(1 + \frac{4u(x_2)v(x_2)}{1+u^2(x_2)}\right) \leq u(x_2)(1+4v(x_2)) \leq u(x_2)(1+4a^2),$$

所以 $u(x_2) > \frac{a}{5+4a^2}$ 。最后令 $v(x_3) = \min_{x \in \bar{\Omega}} v(x)$ ，则：

$$u(x_3) - \frac{u(x_3)v(x_3)}{1+u^2(x_3)} \leq 0,$$

所以 $v(x_3) \geq 1+u^2(x_3) > 1 + \left(\frac{a}{5+4a^2}\right)^2$ 。

对于许多现实的生物，化学模型，方程的解被环境，条件所限制，这样的先验估计是合理的，也可以用类似的方法得到。我们再举一例。

例5.5.

$$\begin{cases} d_1 \Delta u + u(1 - \frac{u}{K}) - \frac{mu v}{1+u} = 0, & x \in \Omega \\ d_2 \Delta v - dv + \frac{mu v}{1+u} = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & x \in \partial \Omega. \end{cases} \quad (5.7)$$

若 (u, v) 是 (5.7) 的非负解，我们证明：

$$0 < u(x) < K, \quad 0 < v(x) < \frac{K(d_1 d + d_2 d)}{d_2 d}, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

由强极值原理可得 $u(x) > 0$ ， $v(x) > 0$ 。设 $u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$ ，则

$$1 - \frac{u(x_0)}{K} > 1 - \frac{u(x_0)}{K} - \frac{mv(x_0)}{1+u(x_0)} \geq 0,$$

因此 $u(x) < K$. 将 (5.7) 中两个方程相加得:

$$\begin{aligned}
 0 &= \Delta(d_1 u + d_2 v) + u(1 - \frac{u}{K}) - dv \\
 &\leq \Delta(d_1 u + d_2 v) + u - dv \\
 &\leq \Delta(d_1 u + d_2 v) + u + \frac{dd_1}{d_2}u - \frac{d(d_1 u + d_2 v)}{d_2} \\
 &\leq \Delta(d_1 u + d_2 v) + K \left(\frac{d_2 + dd_1}{d_2} \right) - \frac{d(d_1 u + d_2 v)}{d_2}
 \end{aligned}$$

因此若 $d_1 u(x_1) + d_2 v(x_1) = \max_{x \in \Omega} (d_1 u(x) + d_2 v(x))$, 则由定理 5.4(应用到 $-(d_1 u + d_2 v)$),

$$d_1 u(x_1) + d_2 v(x_1) \leq \frac{(d_2 + dd_1)K}{d},$$

因此 $v(x) < \frac{(d_2 + dd_1)K}{d_2 d}$.

§5.3 椭圆型方程的上下解方法

考虑以下椭圆型方程:

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.8)$$

这里 $f \in C^1(\mathbb{R})$. 设 $p > n$, 则根据 Sobolev 嵌入定理, $W^{2,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$. 若 $\phi \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Delta\phi + f(\phi) \geq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立, $\phi(x) \leq 0$ 在 $\partial\Omega$ 上几乎处处成立, 则 ϕ 是 (5.8) 的一个下解 (subsolution 或 lower solution); 类似的若 $\Delta\psi + f(\psi) \leq 0$ 在 Ω 中几乎处处成立, $\psi(x) \geq 0$ 在 $\partial\Omega$ 上几乎处处成立, 则 $\psi \in W^{2,p}(\Omega)$ 是 (5.8) 的一个上解 (supersolution 或 upper solution). 我们有以下基本定理:

定理5.5. 若 $f \in C(\mathbb{R})$, $\partial\Omega$ 为 $C^{2,\alpha}$ 光滑, 存在 (5.8) 的一个上解 ψ 和一个下解 ϕ , 使得 $\psi(x) \geq \phi(x)$, 在 Ω 中几乎处处成立. 令 $m = \min_{x \in \Omega} \phi(x)$, $M = \max_{x \in \Omega} \psi(x)$, 设存在 $K > 0$ 使得对任何 $u_1, u_2 \in [m, M]$, $u_1 > u_2$, 我们有

$$f(u_1) - f(u_2) \geq -K(u_1 - u_2),$$

那么 (5.8) 有解 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 使得 $\psi(x) \geq \bar{u}(x) \geq \underline{u}(x) \geq \phi(x)$, 且 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 分别是 (5.8) 在 ϕ 与 ψ 之间的最大解和最小解, 也就是说若 w 是 (5.8) 的解且满足 $\psi \geq w \geq \phi$, 则 $\bar{u} \geq w \geq \underline{u}$.

我们还有以下重要性质:

定理5.6. 设 $p > n$,

- (1) 若 $\psi_1, \psi_2 \in W^{2,p}(\Omega)$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : \psi_1 > \psi_2\}$ 和 $\Omega_2 = \{x \in \Omega : \psi_1 < \psi_2\}$ 是 Ω 内的光滑子区域, 那么若 ψ_1 和 ψ_2 都是 (5.9) 的下解, 则 $\max\{\psi_1, \psi_2\}$ 也是下解; 若 ψ_1 和 ψ_2 都是 (5.9) 的上解, 则 $\min\{\psi_1, \psi_2\}$ 也是上解.
- (2) 若 $\underline{u}$ 和 $\bar{u}$ 分别是定理 5.5 中得到的最小和最大解, 那么 $\underline{u}$ 和 $\bar{u}$ 都是半稳定的, 即 (4.12) 的第一特征值为非负.

定理 ?? 和 5.6 定理的证明见 (史峻平, 2009). 我们以下面的例子说明这些定理的一些应用.

例5.6. 考虑下面的种群增长模型:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u f(u) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

假设 $f(u)$ 为弱 Allee 效应型, 即 $f(0) > 0$, 存在 $u_2 > u_1 > 0$ 使得 $f'(u) > 0, u \in [0, u_1]; f'(u) < 0, u \in (u_1, u_2]; f(u_2) = 0$. 若定义

$$\bar{f}(u) = \begin{cases} f(u_1), & u \in [0, u_1], \\ f(u), & u \in [u_1, u_2], \end{cases} \quad \underline{f}(u) = \begin{cases} f(0), & u \in [0, u_3], \\ f(u), & u \in [u_3, u_2]. \end{cases} \quad (5.9)$$

这里 u_3 是唯一满足 $f(u_3) = f(0)$ 的点, 那么 $\bar{u}$ 和 $\underline{u}$ 都是非增函数, 因此定理 4.5 可以应用于以 $f = \bar{f}$ (或 $\underline{f}$) 的 (5.9), 我们得到当 $f = \bar{f}$ 时, (5.9) 的解集为

$$\bar{\Sigma} = \left\{ (\lambda, \bar{u}_\lambda) : \lambda > \frac{\lambda_1}{f(u_1)} \right\}; \quad (5.10)$$

而 $f = \underline{f}$ 时, (5.9) 的解集为

$$\underline{\Sigma} = \left\{ (\lambda, \underline{u}_\lambda) : \lambda > \frac{\lambda_1}{f(0)} \right\}; \quad (5.11)$$

那么对于弱 Allee 效应型 f 的方程 (5.9), 方程所有正解组成的解集 Σ 正好夹在 $\bar{\Sigma}$ 和 $\underline{\Sigma}$ 之间.

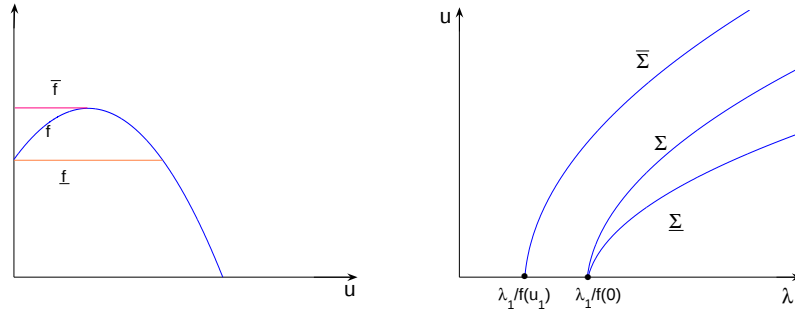


图 5.2 弱 Allee 效应. (左) $\underline{f}$ 和 $\bar{f}$ 与 f 的关系; (右) 分歧图.

事实上, 若 (λ, u) 是 (5.9) 以 f 为非线性项的一个正解, 那么 u 是

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u \bar{f}(u) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.12)$$

的一个下解, 而 u_2 是 (5.12) 的一个上解, 由定理 5.4 知 $u < u_2$, 因此定理 ?? 应用到 (5.12) 证明了在 u 和 u_2 间有一个正解. 而定理 4.5 中已经证明 (5.12) 有唯一正解 $\bar{u}_\lambda$. 因此 $u \leq \bar{u}_\lambda \leq u_2$. 因此任何 (5.9) 的正解 $u \leq \bar{u}_\lambda$. 同理 $u \geq \underline{u}_\lambda$. 示意图 2.52- 右. 注意弱 Allee 效应型的方程 (5.9) 在 $\lambda_0 = \frac{\lambda_1}{f(0)}$ 处的分歧是次临界的 (即 $\lambda'(0) < 0$).

上下解的办法也可以推广到方程组的情况. 考虑

$$\begin{cases} \Delta u + f(u, v) = 0, & x \in \Omega, \\ \Delta v + g(u, v) = 0, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.13)$$

我们定义

(a) 若对于 $u \geq 0, v \geq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \geq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \geq 0;$$

则 (f, g) 为合作型 (cooperative) 的;

(b) 若对于 $u \geq 0, v \geq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \leq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \leq 0,$$

则 (f, g) 是竞争型 (competitive) 的.

注意到合作型也称为拟单调增加, 竞争型也称为拟单调减少.

当 (f, g) 是合作型时, $(\bar{u}, \bar{v})$ 和 $(\underline{u}, \underline{v})$ 称为 (5.13) 的上解和下解, 若

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} + f(\bar{u}, \bar{v}) \leq 0, & x \in \Omega, \\ \Delta \bar{v} + g(\bar{u}, \bar{v}) \leq 0, & x \in \Omega, \\ \Delta \underline{u} + f(\underline{u}, \underline{v}) \geq 0, & x \in \Omega, \\ \Delta \underline{v} + g(\underline{u}, \underline{v}) \geq 0, & x \in \Omega, \\ \bar{u} \geq 0, \bar{v} \geq 0, \underline{u} \leq 0, \underline{v} \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

而当 (f, g) 是竞争型时, $(\bar{u}, \bar{v})$ 和 $(\underline{u}, \underline{v})$ 称为 (5.13) 的上解和下解, 若

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} + f(\bar{u}, \underline{v}) \leq 0, & x \in \Omega, \\ \Delta \bar{v} + g(\underline{u}, \bar{v}) \leq 0, & x \in \Omega, \\ \Delta \underline{u} + f(\underline{u}, \bar{v}) \geq 0, & x \in \Omega, \\ \Delta \underline{v} + g(\bar{u}, \underline{v}) \geq 0, & x \in \Omega, \\ \bar{u} \geq 0, \bar{v} \geq 0, \underline{u} \leq 0, \underline{v} \leq 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

我们注意到在合作型模型中, $(\bar{u}, \bar{v})$ 和 $(\underline{u}, \underline{v})$ 可以单独确定和定义, 而竞争模型中, $(\bar{u}, \bar{v})$ 和 $(\underline{u}, \underline{v})$ 可单独确定, 但必须同时定义.

定理5.7. 若 (f, g) 是合作型或者竞争型的, $(\bar{u}, \bar{v})$ 和 $(\underline{u}, \underline{v})$ 是一对如上定义的上, 下解. 那么存在 (5.13) 的一个解 (u, v) 使得

$$\bar{u} \geq u \geq \underline{u}, \quad \bar{v} \geq v \geq \underline{v}.$$

例5.7. 我们来考虑 4.5 节中研究过的带扩散的竞争模型:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u(1 - u - Au) = 0, & x \in \Omega, \\ \Delta v + \mu v(B - Cu - v) = 0, & x \in \Omega, \\ u = v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.14)$$

若 $\lambda > \lambda_1$, $\mu > \frac{\lambda_1}{B}$, 则 $(u_\lambda, 0)$ 和 $(0, v_{\mu, B})$ 是 (5.14) 的一对半平凡解. 容易验证 $(\bar{u}, \bar{v}) = (u_\lambda, v_{\mu, B})$ 和 $(\underline{u}, \underline{v})$ 是一对上下解, 因此 (5.14) 存在解 (u, v) 满足

$$u_\lambda \geq u \geq 0, \quad v_{\mu, B} \geq v \geq 0.$$

但实际上, $(u_\lambda, 0)$ 和 $(0, v_{\mu, B})$ 本身就满足这一关系. 因此这样简单的上下解并没有给出非平凡解.

我们回忆对常微分方程组 (2.38), 当 $C < B < A^{-1}$ 时有一个稳定共存解, 因此我们证明这样的共存解对于 (5.14) 仍然成立. 设 φ_1 是

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = \lambda \varphi, & x \in \Omega, \\ \varphi = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

的相应于 $\lambda = \lambda_1$ 的正特征函数, 且 $\|\varphi\|_\infty = 1$. 我们仍然以 $(\bar{u}, \bar{v}) = (u_\lambda, v_{\mu, B})$ 为上解, 而下解为 $(\varepsilon\varphi_1, \varepsilon\varphi_1)$, 这里 $\varepsilon > 0$ 是个待定常数. 容易验证对于 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$ 的方程自然满足. 我们假设 $C < B < A^{-1}$, 因此

$$1 - AB = k_1 > 0, \quad B - C = k_2 > 0.$$

那么

$$\begin{aligned} & \Delta(\varepsilon\varphi_1) + \lambda(\varepsilon\varphi_1)(1 - \varepsilon\varphi_1 - A\varepsilon\varphi_1) \\ & \geq \varepsilon\varphi_1[\lambda - \lambda_1 - \lambda\varepsilon - \lambda AB] = \varepsilon\varphi_1[\lambda(k_1 - \varepsilon) - \lambda_1]; \\ & \Delta(\varepsilon\varphi_1) + \mu(\varepsilon\varphi_1)(B - C\varepsilon\varphi_1 - \varepsilon\varphi_1) \\ & \geq \varepsilon\varphi_1[\mu B - \lambda_1 - \mu C - \mu\varepsilon] = \varepsilon\varphi_1[\mu(k_2 - \varepsilon) - \lambda_1]. \end{aligned}$$

那么我们选取 $0 < \varepsilon < \min\{k_1, k_2\}$,

$$\lambda > \frac{\lambda_1}{k_1 - \varepsilon}, \quad \mu > \frac{\lambda_1}{k_2 - \varepsilon}.$$

则 $(u_\lambda, v_{\mu, B})$ 和 $(\varepsilon\varphi_1, \varepsilon\varphi_1)$ 成为一对上下解, 若取 ε 更小, 那么 $u_\lambda \geq \varepsilon\varphi_1$, $v_{\mu, B} \geq \varepsilon\varphi_1$. 根据定理 5.8, (5.14) 有一个正解 (u, v) . 从证明看, 我们只需要

$$C < B < A^{-1}, \quad \lambda > \frac{\lambda_1}{1 - AB}, \quad \mu > \frac{\lambda_1}{B - C}.$$

这一结果可以看作在常微分系统中有稳定共存解时, 只要扩散系数较小 (回忆 $\lambda = 1/d_1, \mu = 1/d_2$), 那么 Dirichlet 边值问题也有类似的共存解. 从 3.3 节的内容看, 也可以解释为当区域 Ω 足够大 (λ 足够小) 时, 那么方程 (5.14) 有类似于常微分方程的解.

最后我们指出上下解方法一般不用在 Neumann 边值问题是因为以下的结果.

定理5.8. 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界凸区域.

(1) 若 u 是

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的一个稳定解, 则 u 必为常数解. (Casten-Holland, 1978; Matano, 1979)

(2) 若 u 是

$$\begin{cases} \Delta u + f(u, v) = 0, & x \in \Omega, \\ \Delta v + g(u, v) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的一个稳定解, 且 (f, g) 是合作型或竞争型的, 那么则 (u, v) 必为常数解.

(Kishimoto, Weinberger, 1983).

类似于定理 5.6, 对于合作型或者竞争型方程组, 由上下解方法得到的解至少是半稳定的. 因此定理 5.8 说明, 对于 Neumann 边值问题, 用上下解方法得到的解在凸区域时必然是常数解, 也就没什么意义了. 但是上下解这一思想的一些进一步应用在很多问题中还是很有用的.

§5.4 抛物型方程的极值原理和比较原理

对于常微分方程

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad f \in C^1(\mathbb{R}).$$

考虑满足 $u(0) = u_1, u(0) = u_2$ 的两个解 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$, 那么若 $u_1 > u_2$, 则 $u_1(t) > u_2(t)$. 这一比较原理是由常微分方程解的唯一性可得. 对于反应扩散方程, 我们有以下比较原理:

定理5.9. 设 $Q_T = \Omega \times (0, T)$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个有界光滑区域, $T > 0$. 设 $u_1(t, x), u_2(t, x) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q}_T)$, $|u_i|, |\nabla u_i|$ 在 $\overline{Q}$ 上一致有界, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. 定义 Q 的抛物边界为

$$\Sigma_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T)).$$

若

$$u_1(t, x) \leq u_2(t, x), \quad (t, x) \in \Sigma_T, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 - f(u_1, \nabla u_1) \leq \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 - f(u_2, \nabla u_2), \quad (t, x) \in Q_T. \quad (5.16)$$

那么对于 $(t, x) \in \overline{Q}_T$, $u_1(t, x) \leq u_2(t, x)$.

证明可见 (Smoller, 1994), (Aronson-Weinberger, 1978).

作为一个简单应用, 我们考虑 Neumann 边值下的 Fisher-KPP 方程:

例5.8. 考虑

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u(1 - u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (5.17)$$

设 $u_0(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $u_0(x) \geq 0$, $u_0(x) \not\equiv 0$. 方程解的局部存在性可见一般教科书, 如 (Henry, 1981). 设 $u(t, x)$ 为 (5.17) 的解, 则 $u(t, x)$ 至少在 $t \in (0, \delta)$ 上存在. 令 $u_1(x) = u_0(\delta/2, x)$, 则由定理 5.9 知 $u_1(x) > 0$, $x \in \overline{\Omega}$ (由与 $u(t, x) \equiv 0$ 的比较). 设 $0 < m \leq u_1(x) \leq M$, $x \in \Omega$, 考虑以 m 为初值的解 $u_m(t, x)$ 和以 M 为初值的解 $u_M(t, x)$. 若 $u_m(t, x)$, $u_M(t, x)$ 存在, 那么以 $u_1(x)$ 为初值的解 $\tilde{u}(t, x)$ 满足

$$u_m(t, x) < \tilde{u}(t, x) < u_M(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q}_T.$$

而 $u_m(t, x)$, $u_M(t, x)$ 实际上不依赖于 x , 即 $u_m(t, x) = u_m(t)$, $u_M(t, x) = u_M(t)$. 而 $u_m(t, x)$ 和 $u_M(t, x)$ 是

$$\frac{du}{dt} = u(1 - u) \quad (5.18)$$

分别是以 m 和 M 为初值的解. 因为 $u_m(t, x)$, $u_M(t, x)$ 对所有 $t > 0$ 存在, 且

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_m(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} u_M(t) = 1.$$

因此 $\tilde{u}(t, x)$ 也对 $t > 0$ 存在, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{u}(t, x) = 1$ 对 $x \in \overline{\Omega}$ 一致成立. 由抛物方程解的唯一性知 $u(t, x) = \tilde{u}(t - \delta/2, x)$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 1$ 对 $x \in \overline{\Omega}$ 一致成立.

例 (5.8) 的想法对于合作型或竞争型的反应扩散方程组也可以, 但是把偏微分方程的解与常微分方程的解作比较还是有局限性. 我们把上下解的概念推广到抛物型方程:

考虑

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \text{边值条件}, & t > 0, x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.19)$$

这里 Ω 既可以是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, 也可以是 $\mathbb{R}^n$ 本身. 我们定义 $\underline{u}(x)$ 为 (5.19) 的一个下解若 $\delta \underline{u} + f(\underline{u}) \geq 0$, $x \in \Omega$ (若 Ω 为有界的且边界条件为 $u = 0$, 我们还要求 $\underline{u} \leq 0$, $x \in \partial\Omega$). 上解 $\overline{u}$ 可以类似定义.

定理 5.10. 若 $\underline{u}$ 是 (5.19) 的一个下解, 则 (5.19) 以 $\underline{u}$ 为初值的解 $u(t, x)$ 对时间 t 单调上升, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$ 是大于 $\underline{u}$ 的 (5.19) 最小平衡解 (若 $u(t, x)$ 有界).

Proof. 由 $\Delta \underline{u} + f(\underline{u}) \geq 0$ 可知 $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) \geq 0$. 因此存在小的 $t_0 > 0$ 使得 $t \in [0, t_0]$, $u(t, x) \geq \underline{u}(x)$, $x \in \Omega$.

令 $v(t, x)$ 为

$$\begin{cases} v_t = \Delta v + f(v), & t > 0, x \in \Omega, \\ v(0, x) = u(t_0, x), & x \in \Omega, \\ \text{与(5.19)有相同的边值条件}. \end{cases}$$

的解. 则由定理 5.9,

$$v(t, x) > u(t, x), \quad t > 0, x \in \Omega.$$

因为初值 $u(t_0, x) \geq \underline{u}(x)$. 由方程唯一性, $v(t, x) = u(t + t_0, x)$. 因此 $u(t + t_0, x) > u(t, x)$, 而 t_0 可以任意小. 重复使用这一论证说明

$$u(t_2, x) > u(t_1, x), \quad t_2 > t_1, x \in \Omega.$$

若 $u(t, x)$ 有界, 则 $u^*(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x)$ 逐点存在且在 Ω 的任何紧子集收敛是一致的. 可以证明这样的收敛可以在 $C^2(\Omega)$ (取子列), 这说明 $u^* \in C^2(\Omega)$. 因此满足平衡解方程, 由比较原理知 u^* 是大于 $\underline{u}$ 的最小平衡解. $\square$

例5.9. 我们考虑全空间上的 *Fisher-KPP* 方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u(1-u), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5.20)$$

自然的想法是仍然用例 5.8 里的比较方法, 即与常数比较. 这对于上界没有问题, 但若 $u_0(x)$ 在大部分区域为零, 那么即使 $u(t, x)$ 为正, $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(t, x)$ 仍然是零. 因此不能以一个正的常数为下解. 设 φ_1 为

$$\begin{cases} \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0, & x \in B_1, \\ \varphi = 0, & x \in \partial B_1 \end{cases}$$

的第一特征函数, $\varphi_1 > 0$. 我们知道 φ_1 是球对称的. 定义 $\underline{u}(x) = \varepsilon \varphi_1(x)$, $x \in B_1$; $\underline{u}(x) = 0$, $x \notin B_1$. 则根据定理 5.6 类似的证明, $\underline{u}(x)$ 是一个下解且 $u(t_0, x) > \underline{u}(x)$ 若 ε 足够小及对于某个 $t_0 > 0$. 根据定理 5.9, $u(t+t_0, x) > v(t, x)$, 这里是 $v(t, x)$ 以 $\underline{u}(x)$ 为初值的 (5.20) 解, 根据定理 5.10, $v(t, x)$ 关于 t 单增且收敛于大于 $\varepsilon \varphi_1$ 最小的平衡解 u_* . 另一方面因为解的唯一性, $v(t, x)$ 必然是球对称的, 因此 u_* 也是球对称的. 但是 $\Delta u + u(1-u) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ 除了 $u = 1$ 外没有球对称的正解. 因此 $u_*(x) = 1$. 这样

$$1 \geq \lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} v(t, x) = u_*(x) = 1.$$

但是注意这里的收敛不一定是一致的, $v(t, x)$ 向 $u_*(x) \equiv 1$ 的收敛恰好是生成一个球对称, 类似于行波解的过程. 可以证明渐近速度为 $c = 2$ 是 *Fisher-KPP* 方程的最小波速 (见第三章).

定理 5.10 的应用往往伴随着 (5.19) 的平衡解的讨论, 像例 5.9 中非平凡平衡解不存在使得解的动力行为大为简化. 方程解的行为类似于常微分方程, 虽然行波解的存在使得收敛是在整个空间逐步实现的.

在抛物方程历史文献中占重要地位的是 Fujita 方程 (Fujita, 1964):

$$u_t = \Delta u + u^p, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.21)$$

这里 $p > 1$. 对于不同的 p 值, (5.21) 有不同的渐近行为, 例如在有限时间爆破; 收敛到零; 收敛到平衡解等等 (Wang, 1993; Gui, Ni, Wang 1992, 2001). 我们在这里不多讨论. 一类生物化学自催化反应的方程

$$u_t = \Delta u + u^p(1-u), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \quad (5.22)$$

或

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p v, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ v_t = \Delta v - u^p v, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.23)$$

有类似 Fujita 方程的动力行为 (当 $p > \frac{n+2}{n-2}$ 时), 而又类似于 Fisher-KPP 方程若 $p < \frac{n+2}{n-2}$. 特别是 (5.22) 在 $p > \frac{n+2}{n-2}$ 时平衡解 $u = 0$ 和 $u = 1$ 具有双稳定性 (Shi-Wang, 2006).

§5.5 第五章练习题

1. 若 u 是

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

的一个非负解. 其中 f 满足 $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $f(0) = f(M) = 0$. $f(u) > 0$, $u \in (0, M)$; $f(u) < 0$, $u > M$.
证明: $0 < u(x) < M$, $x \in \Omega$.

2. 若 (u, v) 是带扩散的竞争方程 (5.14) 的一个正解, 那么必有 $\lambda > \lambda_1$, $\mu > \frac{\lambda_1}{B}$ 且 $0 < u(x) < u_\lambda(x)$, $0 < v(x) < v_{\mu, B}(x)$, $x \in \Omega$.

3. 考虑 Klausmeir 模型的平衡解方程 ($a > 0, m > 0$):

$$\begin{cases} d_1 \Delta w + a - w - wn^2 = 0, & x \in \Omega, \\ d_2 \Delta n + wn^2 - mn = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial n}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

(这里 $\partial/\partial\nu$ 代表边界法向导数) 试推导方程组平衡解的先验估计.

4. 考虑 Schnakenberg 模型的平衡解方程

$$\begin{cases} d_1 \Delta u + u^2 v - u + b = 0, & x \in \Omega, \\ d_2 \Delta v - u^2 v + a = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

试推导方程组平衡解的先验估计.

5. 考虑 Fisher-KPP 方程

$$\begin{cases} \Delta u + u(1 - u) = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

若 u 是方程的非负解, 证明 $u(x) \equiv 0$ 或 $u(x) \equiv 1$.

6. 利用定理 4.5 证明 $\Delta u + u(1 - u) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ 没有除 $u = 0$ 和 $u = 1$ 外的球对称解.

7. 考虑 Fisher-KPP 方程的 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda u(1 - u), & t > 0, x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

证明:

- (1) 若 $\lambda < \lambda_1$, 则对于任何 $u_0(x) \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0$;
(2) 若 $\lambda > \lambda_1$, 则对于任何 $u_0(x) \geq 0 (\neq 0)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = u_\lambda(x)$, 方程的唯一正平衡解 (见定理 4.5).

第六章 变分, 能量与梯度

§6.1 常微分方程 Hamilton 系统

为简单起见, 我们仅考虑平面系统:

$$\begin{cases} x' = f(x, y), & t > 0, \\ y' = g(x, y), & t > 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

(6.1) 被称为一个 Hamilton 系统, 若存在一个能量函数 $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\frac{\partial H}{\partial y} = f(x, y), \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -g(x, y)$$

成立, 即 Hamilton 系统形如

$$x' = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (6.2)$$

Hamilton 系统具有这样的性质: 若 $(x(t), y(t))$ 是 (6.2) 的一个解, 则 $H(x(t), y(t)) \equiv c, t \geq 0$. 因此所有解的轨道在 $H(x, y)$ 的水平曲线 (level curve) 上. 在线性系统中只有鞍点和中心可能是 Hamilton 系统.

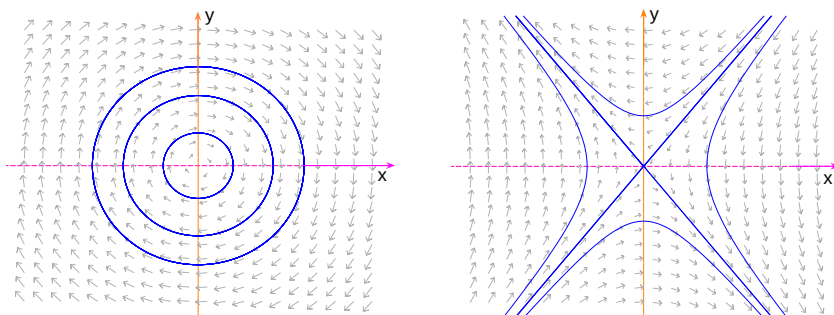


图 6.1 平面线性 Hamilton 系统的相图. (左) $x' = y, y' = -x, H(x, y) = x^2 + y^2$; (右) $x' = -y, y' = -x, H(x, y) = x^2 - y^2$

Hamilton 系统有如下性质:

1. 判断 (6.1) 是 Hamilton 系统的准则是: 若 $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}$, 则 (6.1) 是 Hamilton 系统;
2. 若 (x_0, y_0) 是系统 (6.2) 的一个平衡点, 则 Jacobian 矩阵为

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} H_{xy} & H_{yy} \\ -H_{xx} & -H_{xy} \end{pmatrix}.$$

因此 $Tr(J) = 0$, $Det(J) = -H_{xy}^2 + H_{xx}H_{yy}$. 当 $Det(J) > 0$ 时, (x_0, y_0) 为中心型, 所有轨道都是周期轨道; 当 $Det(J) < 0$ 时, (x_0, y_0) 为鞍点.

两类重要的 Hamilton 型系统为

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -f(x), \end{cases} \quad (6.3)$$

其能量函数 $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int f(x)dx$, 而 (6.3) 等价于二阶常微分方程

$$x'' + f(x) = 0. \quad (6.4)$$

另一类更广泛的系统为

$$\begin{cases} x' = g(y), \\ y' = -f(x), \end{cases} \quad (6.5)$$

其能量函数为 $H(x, y) = \int g(y)dy + \int f(x)dx$, Hamilton 系统直接出现在生物应用中较为罕见。我们只举一例: 最经典的 Lotka-Volterra 捕食系统

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \quad (6.6)$$

这里 $a, b, c, d > 0$, 观察 (6.6) 的轨道等价于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(dx - c)}{x(a - by)}.$$

将方程积分可得: $a \ln y - by = dx - c \ln x + K$, 其中 K 为常数。所以 (6.6) 是 Hamilton 系统。

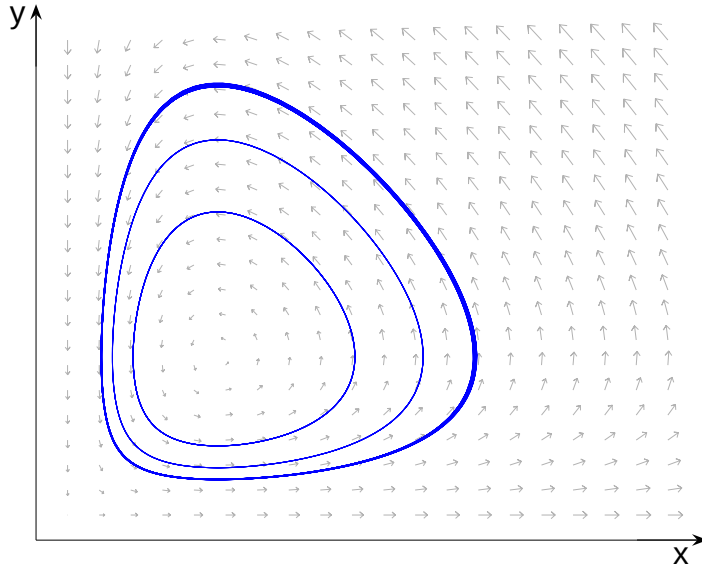


图 6.2 (6.6) 的相图.

方程 (6.4) 是反应扩散方程 $u_t = u_{xx} + f(u)$ 的平衡解方程。因此对 (6.3) 的相图分析可以帮助对反应扩散方程平衡解研究。

例6.1. 若 $f(u) = u(1 - u)$, 则 Fisher-KPP 方程的在 $\mathbb{R}$ 上的有界非负平衡解仅有 $u = 0, u = 1$ 。其它的有界解在 $-R < x < R$ 之间为正。而对于强 Allee 效应型 $f(u) = u(1 - u)(u - a), 0 < a < \frac{1}{2}$, 解的种类丰富许多, 除了常数解 $u = 0, u = a$ 和 $u = 1$ 外, 有无穷多环绕 $u = a$ 的正周期解, 还有 $u = 0$ 的稳定/不稳定流形对应的同宿轨道。同宿轨道定义了一个 $\mathbb{R}$ 上的对称尖峰解, 也称为 *ground-state solution*。

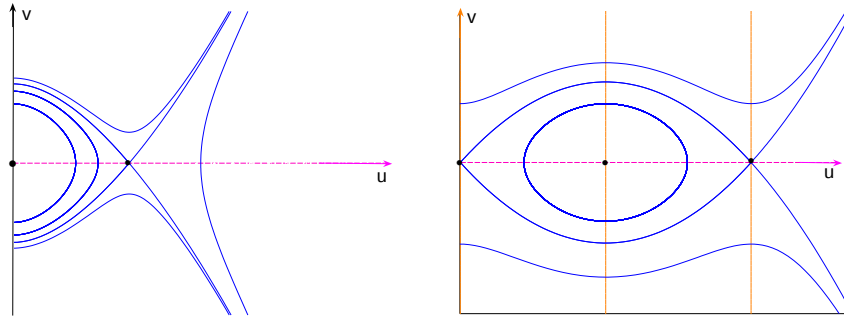


图 6.3 (6.3) 的相图. (左) $f(u) = u(1-u)$; (右) $f(u) = u(1-u)(u-a)$, $0 < a < 1/2$

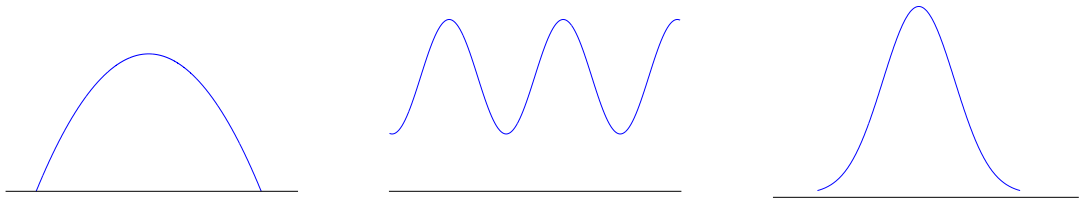


图 6.4 (6.4) 可能的非常数解. : (左) 有界区域上的正解; (中) 周期解; (右) 对称尖峰解

这些解的存在, 结合抛物方程的比较原理: 定理 5.8, 5.9 可以描述反应扩散方程

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-a), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}$$

的解的渐进性态。

§6.2 耗散系统和梯度系统

若对于方程组 (6.1), 存在一个 Lyapunov 函数 $V(x, y), V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 使得:

$$\frac{dV}{dt}((x(t), y(t))) \leq 0,$$

这里 $((x(t), y(t)))$ 是 (6.1) 的任意轨道, 则我们称 (6.1) 为**耗散系统 (dissipative system)**.

对于一个 Hamilton 系统, 往往一个阻尼扰动可将其转化为一个耗散系统。例如单摆 (pendulum) 方程

$$\theta'' + \frac{\mu}{m}\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \quad (6.7)$$

当 $\mu = 0$ 时, (6.7) 是一个 Hamilton 系统; 但当 $\mu > 0$ 时, (6.7) 成为一个耗散系统。这里能量函数为 $V(\theta, \theta') = \frac{1}{2}(\theta')^2 - \frac{g}{L}\cos\theta$ 。

一类特殊的耗散系统是**梯度系统 (gradient system)**。方程组 (6.1) 是梯度系统, 若存在 $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$x' = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad y' = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (6.8)$$

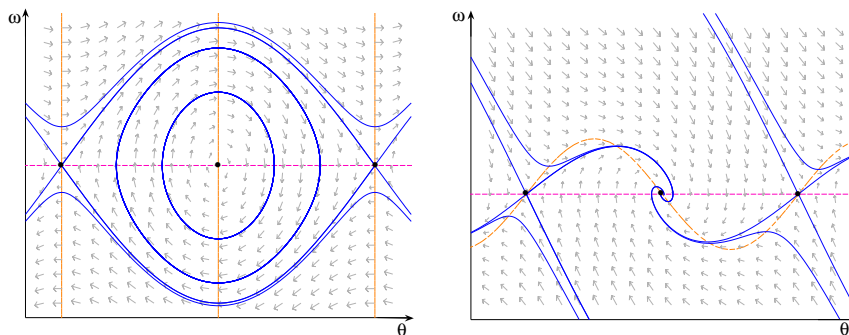


图 6.5 单摆方程的相图 (左) $\mu = 0$; (右) $\mu > 0$.

显然梯度系统是耗散系统, 因为 $\frac{dH(x(t), y(t))}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2$. 在耗散系统中能量函数沿解轨道递减, 因此不可能有周期轨道。因而 Poincare-Bendixson 理论可以大大简化。

最后我们指出 Hamilton 系统, 耗散系统和梯度系统可以统一为同一能量函数 $H(x, y)$ 相对应的三个系统: 在一个水平面 $H(x, y) = c$ 上, Hamilton 系统的向量场定义在水平面切方向, 梯度系统向量场定义在水平面法方向 (负梯度方向), 而耗散系统介于两者之间。因此 Hamilton 系统保持能量, 梯度系统能量以最快方式减少, 而一般的耗散系统能量减少较慢。

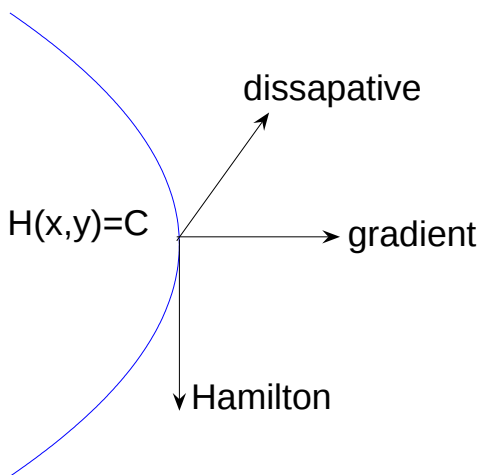


图 6.6 三类系统图示.

§6.3 反应扩散方程中的能量变化

考虑如下扩散方程

$$u_t = d\Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (6.9)$$

我们定义系统动能为

$$E_0(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dE_0(u)}{dt} &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t dx = - \int_{\Omega} u_t \cdot \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} u_t \cdot \nabla u \cdot n dS \\ &= -\frac{1}{d} \int_{\Omega} u_t^2 dx + \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dS, \end{aligned}$$

若边值条件为 Neumann 的, 即 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, 则

$$\frac{dE_0(u)}{dt} = -\frac{1}{d} \int_{\Omega} u_t^2 dx. \quad (6.10)$$

若边值条件为 Dirichlet 的, 即 $u = 0$, 则 $u_t|_{\partial\Omega} = 0$ 。所以, (6.10) 也成立, 系统动能总是被耗散的。

类似地, 对于反应扩散方程

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + f(u), & t > 0, x \in \Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.11)$$

我们定义

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(u(x)) dx, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad (6.12)$$

这里, $F(u) = \int_0^u f(v) dv$ 。注意, $E : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续可微泛函。若 f 具有一定的光滑性 (Rabinowitz, 1986), 那么 E 在 u 处的 Fréchet 导数 $DE \in \mathcal{L}(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ 定义为

$$\begin{aligned} DE(u)[w] &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E(u+tw) - E(u)}{t} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w dx - \int_{\Omega} f(u) w dx \\ &= - \int_{\Omega} (\Delta u + f(u)) w dx. \end{aligned}$$

因此若 $DE(u) = 0$, 则 u 满足 $\Delta u + f(u) = 0, \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, 即 u 是方程 (6.11) 的一个弱平衡解。由椭圆方程正则性理论, 当 f 是光滑的, 则弱平衡解都是经典的平衡解。这样, 寻找 (6.11) 的平衡解可以转化为寻找 $E(u)$ 的临界点 (critical point)。

另一个更一般的能量计算是: 设 $u(t, x)$ 是 (6.11) 的一个解, 那么沿着解轨道的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dE(u(t, x))}{dt} &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t dx - \int_{\Omega} f(u(x)) \cdot u_t dx \\ &= - \int_{\Omega} (\Delta u + f(u)) \cdot u_t dx \\ &= - \int_{\Omega} u_t^2 dx \leq 0, \end{aligned}$$

即 E 是 (6.11) 的一个 Lyapunov 函数。在这一意义下, (6.11) 是一个耗散系统。事实上, $\frac{dE}{dt}(u(t, x))$ 可以看成 E 沿着轨道速度方向 u_t 的梯度流, 即

$$\frac{dE}{dt}(u(t, x)) = DE(u(t, x))[u_t(t, x)].$$

因此, (6.11) 又是一个梯度系统。这一结构对于 (6.11) 的研究起着很大的作用, 后面我们可以看到在很多情况下, (6.11) 的解一定收敛到一个平衡解, 因此平衡解集的决定变得非常重要。抽象地看, (6.11) 可以写成

$$\frac{du}{dt} = \nabla E(u),$$

这里 $\frac{du}{dt}, \nabla E(u)$ 都是 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的共轭空间 $(W_0^{1,2}(\Omega))^*$ 中的元素。因此, 这是一个以无穷维空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 为相空间的梯度系统。这一想法在研究椭圆型方程 (即方程 (6.11)) 的平衡解时, 在现今仍起着重要作用, 被称为“热流法” (heat flow)。在下一节中, 我们将建立一个更加广泛的框架来考虑这类问题。

§6.4 抽象动力系统

设 X 为一个完备的度量空间, 或者为简单起见, 一个 Banach 空间。 X 上的一个连续动力系统 (continuous dynamical system) 是一个映射 $T: \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$, 使得 $T(t): X \rightarrow X$ 的定义为 $T(t)x = T(t, x)$, $t \geq 0$, 满足:

- (i). $T(t)x$ 连续, $\forall t \geq 0, \forall x \in X$;
- (ii). $T(0) = I$, 单位映射;
- (iii). $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall s, t \geq 0$.

类似地, 可以定义离散动力系统 (discrete dynamical system) $T: \mathbb{Z}^+ \times X \rightarrow X$, $\mathbb{Z}$ 为整数集合。我们在这里只考虑连续动力系统, 有些文献也把 $T(t)$ 称为一个半流 (semiflow)。

对于 $\forall x \in X$, 定义从 x 出发的正轨道 (positive orbit) 是 $\gamma^+(x) := \{T(t)x : t \geq 0\}$; 负轨道 (negative orbit) 是 $\gamma^-(x) := \{T(t)x : t \leq 0\}$ 。从定义上易知, 负轨道不见得唯一。因此定义 $\Gamma^-(x)$ 为所有负轨道的集合。那么, 一个通过 x 的全局轨道 (global orbit) 就是 $\gamma(x) := \gamma^+(x) \cup \gamma^-(x)$, 设 $\Gamma(x)$ 是通过 x 的全局轨道集合。对于 X 的子集 B , 我们可以类似地定义 $\gamma^+(B), \gamma^-(B), \gamma(B), \Gamma^-(B), \Gamma(B)$ 。

对于一个子集 $B \subset X$, ω -极限集 (ω -limit set) 和 α -极限集 (α -limit) 的定义分别为

$$\begin{aligned}\omega(B) &= \bigcap_{t \geq 0} Cl\left(\bigcup_{s \geq t} T(s)B\right), \\ \alpha(B) &= \bigcap_{t \leq 0} Cl\left(\bigcup_{s \leq t} T(s)B\right).\end{aligned}$$

这里, $Cl(A)$ 是 A 的闭包。若一个集合 $J \subset X$ 满足 $T(t)J = J$, $t \in \mathbb{R}$, 则称 J 为一个不变集 (invariant set)。若 $T(t)J = J$, $t \in \mathbb{R}^+$, 则称 J 为一个正不变集 (positively invariant set)。若 $J \subset X$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(T(t)K, J) = 0$, 则称 J 是 K 的吸引集 (attract set)。吸引集也可以定义为: 对于 J 的任一邻域 U , 存在 $t_0 \geq 0$ 使得对 $t > t_0$, $T(t)K \subset U$ 。(有些文献称后一定义为 point dissipative)。如果 $L \subset X$ 且 L 是它本身一个邻域的吸引集, 则称 L 是一个吸引子 (attractor)。所有这些 L 吸引的邻域的并集为 L 的吸

引域 (basin of attraction). 若 L 的吸引域是 X , 则称 L 是**全局吸引子 (global attractor)**. 吸引子一定是不变集。

一些常见的不变集有: 平衡点 (equilibrium), 即 $\gamma(x) = \{x\}$. 我们将平衡点的集合记为 $E(T)$; 周期解 (periodic solution), 即存在 $T_0 > 0$ 使得 $T(T_0)x = x$, $\gamma(x) = \{T(t)x : 0 \leq t \leq T_0\}$.

设 T 是一动力系统, 若存在一连续函数 $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ (称为 Lyapunov 函数) 使得:

- (i) $V(T(t)x) \leq V(x)$, $t \geq 0$, $x \in X$;
- (ii) 若 $V(T(t)x) = V(x)$, $t \geq 0$, 则 $x \in E(T)$,

则称 T 为一**梯度系统 (gradient system)**. 若比较这一定义与 6.2 节中的定义, 它更接近于那里的耗散系统. 这里重要的定理是:

定理6.1. 若 T 是一个梯度动力系统, 正轨道 $\gamma^+(x_0)$ 是相对紧的 (即 $\overline{\gamma^+(x_0)}$ 是紧的), 则 $\omega(x_0) \subset E(T)$.

更一般的关于 ω - 极限集的结论是:

定理6.2. 若 $\gamma^+(x_0)$ 是相对紧的, 那么 $\omega(x_0)$ 是一个非空紧的连通不变集, 且 $\omega(x_0)$ 吸引 $\gamma^+(x_0)$.

从这两个定理可知: 若梯度系统 T 仅有离散的不连通的平衡点集, 则 $\omega(x_0)$ 总是一个平衡点。

对于常微分方程或 $\mathbb{R}^n$ 上的其他动力系统, 若它还具有梯度系统结构, 则很多情况下 ω - 极限集是单个平衡点. 轨道的紧性在有限维动力系统中仅需证明轨道是有界的。

§6.5 抛物型方程的吸引子

考虑下述 Neumann 边值问题:

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(x, u), & t > 0, x \in (0, 1) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, 1) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (6.13)$$

在这里, $f \in C^2$. 那么可以证明 (6.13) 定义了一个动力系统, 且对于 X 中的有界集 B , 若存在一个时间 $t > 0$ 使得 $T(t)B$ 是有界的, 则 $T(t)B$ 是相对紧的. 由类似 6.3 节中的 Lyapunov 函数, 即

$$E(u) = \frac{d}{2} \int_0^1 [u'(x)]^2 dx - \int_0^1 F(x, u(x)) dx,$$

在这里 $F(x, u) = \int_0^u f(x, t) dt$, 下述定理成立 (Zelenyak, 1968).

定理6.3. 方程 (6.13) 定义的动力系统是一个梯度系统, 且:

- (i) 若 $\gamma^+(x_0)$ 是一个有界轨道, 则 $\omega(x_0)$ 是一个单平衡点;
- (ii) 若 (6.13) 得所有解是有界的, 则存在一个紧的全局吸引子 A_f . 若所有平衡点是非退化的 (即 0 不是线性化算子的特征值), 则

$$A_f = \bigcup_{x \in E} W^u(x),$$

即 A_f 是所有平衡点及其不稳定流形的并集。

我们以“对称”的 Fisher-KPP 方程为例:

例6.2. 考虑下述问题:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda u(1-u)(1+u), & t > 0, x \in (0, \pi) \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x) \in X. \end{cases} \quad (6.14)$$

事实上这是材料科学中描述两种金属混合的 *Allen-Cahn* 方程。非线性项 $f(u) = u - u^3$, 在 $u > 0$ 时为 *Logistic* 型。 $u(x) = \pm 1$ 是 (6.14) 的两个稳定常数平衡解, $u = 0$ 是不稳定平衡解。由第五章中的比较原理容易知道, 对于任何 $u_0(x)$ 出发的解都满足: $\forall \delta > 0$, 存在 $t_\delta > 0$, 使得 $t > t_\delta$ 时, $-1 - \delta \leq u(t, x) \leq 1 + \delta$. 这是因为若 $|u| > 1$ 则 $f(u) < 0$. 这说明了了解的有界性。根据定理 6.3, 任何轨道都收敛的一个平衡点, 一个紧的全局吸引子存在。

因此吸引子的结构由平衡解集合的结构决定。考虑下述平衡解方程:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u(1-u)(1+u) = 0, & 0 < x < \pi \\ u'(0) = u'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

根据第四章的分歧定理, $\lambda_n = n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) 是 (6.15) 的分歧点, 而可以证明每个分歧点是音叉分歧使得在分歧点 $\lambda''(0) > 0$; 从 $\lambda = \lambda_n$ 分歧出来的平衡解属于一个全局连通分支 Σ_n , $\Sigma_n = \{(\lambda, u_\lambda^\pm) : \lambda > n^2\}$, 其中 $u_\lambda^+(0) > 0$, $u_\lambda^- = -u_\lambda^+$, $u_\lambda^\pm(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上恰有 n 个零点, 在分歧点 $\lambda = \lambda_n$ 附近, $u_\lambda^\pm(x) = \pm s \cos(nx) + \text{高阶项}$; Σ_n 上的每个解都是非退化的, 其 *Morse* 指数为 n (*Morse* 指数是线性化算子 $\phi_{xx} + \lambda f'(u)\phi$ 的正特征值个数)。那么平衡解的分歧图如下:

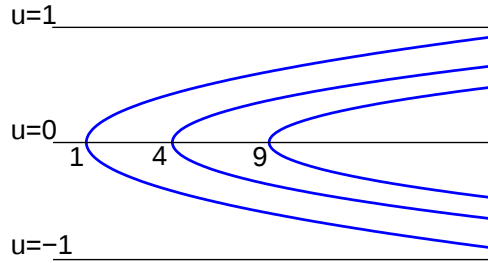


图 6.7 (6.15) 解的分歧图

那么 (6.14) 的吸引子结构也完全清楚了; 当 $n^2 < \lambda < (n+1)^2$ 时, (6.14) 恰好有 $2n+3$ 个平衡解, 吸引子包含所有这些平衡解及其之间的异宿轨道. 若两个平衡解 u_1 和 u_2 的 *Morse* 指数为 $k < m$, 则存在从 u_2 到 u_1 的唯一异宿轨道. 吸引子结构见下图:

应当指出偏微分方程研究中, 像上面例子这样近乎完美的全局分歧, 吸引子的清晰刻划是非常罕见的. 但是许多问题中, 仍然可以得到其中一部分的结果.

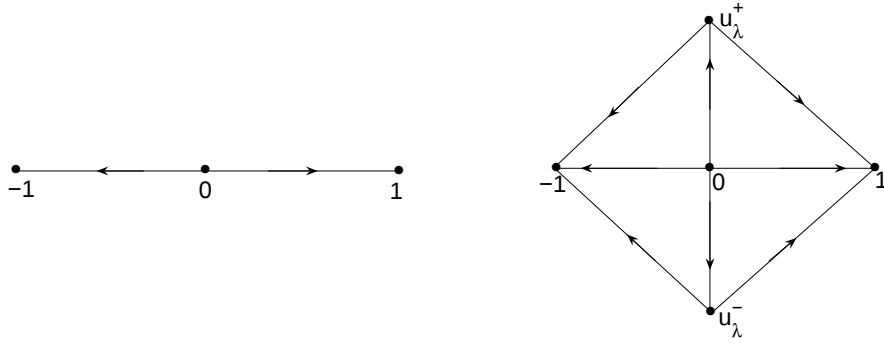


图 6.8 (6.14) 的吸引子结构. (左): $0 < \lambda < 1$; (右): $1 < \lambda < 4$.

对于高维区域 Ω 上的抛物方程:

$$\begin{cases} u_t = d\Delta u + f(x, u), & t > 0, x \in \Omega, \\ \text{边值条件 (Dirichlet 或 Neumann)}, & t > 0, x \in \Omega. \end{cases} \quad (6.16)$$

我们在 6.3 节已经看到 (6.16) 具有形如 (6.12) 的 Lyapunov 函数, 动力系统可以在 $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ $p > n$ 中定义, 且对于任何 X 中的有界集 B , 存在 $t_0 > 0$ 使得若 $T(t)B$ 是有界的, 则 $T(t)B$ 是相对紧的. 因此定理 6.1, 6.2 可以应用在 (6.16) 上. 但是 (6.16) 的平衡解集和可能比一维情形复杂得多. 综合起来我们有:

定理 6.4. 方程 (6.16) 定义的动力系统是一个梯度系统.

- (1) 若 (6.16) 的解是有界的, 则紧吸引子 A_f 存在;
- (2) 若存在 $M > 0$ 使得 $uf(x, u) < 0$, $|u| > M$, 则 (6.16) 的解是有界的;
- (3) 每个有界轨道收敛到一个单平衡点, 若以下条件之一成立:
 - (3a) f 是解析函数 (Simon, 1983);
 - (3b) Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球 (Haraux, Poláčik, 1992);
 - (3c) 所有平衡解的 Morse 指数 ≤ 1 (Hale, Raugel, 1992).

应当指出我们可以只考虑方程 (6.16) 的正解. 由第五章的极值原理, 若 $f(x, 0) \geq 0$, $x \in \bar{\Omega}$, 则 $u_0(x) \geq 0$ 意味着 $u(t, x) > 0$, $t > 0, x \in \Omega$. 我们可以在 X 的正锥 X^+ 上考虑 (6.16), 类似的定理仍然可以应用. 在这一情况下, 若方程 (6.16) 的非负平衡解可以清楚地刻画, 正锥中的吸引子可以完全被完整描述出来.

例如 Neumann 边值的 Fisher-KPP 方程在正锥中的吸引子是 $u = 0$, $u = 1$ 和它们之间的常数同宿轨道. 在 (Ouyang-Shi, 1998, 1999) 和 (Shi, 2009) 中, 当 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球时, (6.16) 的非负平衡解可以完全划分, 则吸引子也可以完全决定.

例 6.3. 考虑具有强 Allee 效应的反应扩散方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda u(1-u)(u-a), & t > 0, x \in B^n, \\ u(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial B^n, \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, & x \in B^n. \end{cases} \quad (6.17)$$

则由 (Ouyang-Shi, 1998) 的结果存在 $\lambda_* > 0$ 使得 (6.17) 在 $\lambda < \lambda_*$ 时的唯一非负平衡解为 $u = 0$; 当 $\lambda > \lambda_*$ 时恰好有 3 个非负平衡解 $u_\lambda^+ > u_\lambda^- > 0$, 其中 u_λ^+ 和 0 是稳定的. 事实上 $u_\lambda^\pm$ 都是球对称的, 这是根据 (Gidas-Ni-Nirenberg, 1979) 的著名结果. 最后根据单调动力系统的一个结果 (Jiang-Liang-Zhao, 2004) 可以把正锥 X^+ 分割成三部分:

$$X^+ = B_0 \cup B_+ \cup B_-,$$

其中 B_0 和 B_+ 分别是 $u = 0$ 和 $u = u_\lambda^+$ 的吸引域, 而 B_- 是 u_λ^- 的稳定流形, B_- 是 X^+ 中一个余维数为 1 的流形.

参考文献

- [1] Allee, W. C., Animal Aggregations. A study in General Sociology. University of Chicago Press, Chicago. (1931).
- [2] Aronson, D. G.; Weinberger, H. F. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation. Partial differential equations and related topics (Program, Tulane Univ., New Orleans, La., 1974), pp. 5–49. *Lecture Notes in Math.*, **446**, Springer, Berlin, 1975.
- [3] Aronson, D. G.; Weinberger, H. F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Adv. in Math.* **30** (1978), no. 1, 33–76.
- [4] Beverton, R. J. H.; Holt, S. J., On the dynamics of exploited fish populations. *Fish. Invest. Minist. Agric. Fish. Food G.B.* (2. Sea Fish.), 19, (1957).
- [5] Brezis, H.; Kamin, S, Sublinear elliptic equations in $\mathbf{R}^n$, *Manu. Math.* **74** (1992), 87–106.
- [6] Cantrell, Robert Stephen; Cosner, Chris, Spatial ecology via reaction-diffusion equation. *Wiley series in mathematical and computational biology*, John Wiley & Sons Ltd, (2003).
- [7] Casten, Richard G.; Holland, Charles J., Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions. *J. Differential Equations* **27** (1978), no. 2, 266–273.
- [8] Chafee, N.; Infante, E. F., A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. *Applicable Anal.* **4** (1974/75), 17–37.
- [9] Cheng, K. S., Uniqueness of a limit cycle for a predator-prey system. *SIAM J. Math. Anal.* **12** (1981), 541–548.
- [10] Clark, C.W., Mathematical Bioeconomics, The Optimal Management of Renewable Resources. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1991.
- [11] Crandall, Michael G.; Rabinowitz, Paul H., Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Functional Analysis*, **8** (1971), 321–340.
- [12] Crandall, Michael G.; Rabinowitz, Paul H., Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability. *Arch. Rational Mech. Anal.* **52** (1973), 161–180.
- [13] Evans, Lawrence C., Partial differential equations. *Graduate Studies in Mathematics*, **19**. American Mathematical Society, Providence, (1998).
- [14] Fisher, R.A., The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics* **7**(1937), 353–369.
- [15] FitzHugh, R., Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical Journal* **1** (1961), 445–466.
- [16] Fujita, Hiroshi, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **13** (1966), 109–124.
- [17] Gidas, B.; Ni, Wei Ming; Nirenberg, L., Symmetry and related properties via the maximum principle. *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), no. 3, 209–243.

- [18] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S., Elliptic partial differential equations of second order. Second edition. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1983).
- [19] M. E. Gilpin, Enriched predator-prey systems: theoretical stability. *Science* **177** (1972), 902–904.
- [20] Gray, Peter; Scott, S. K., Chemical oscillations and instabilities. Oxford Univ. Press, New York-Oxford, (1990).
- [21] Gui, Changfeng; Ni, Wei-Ming; Wang, Xuefeng, On the stability and instability of positive steady states of a semilinear heat equation in R^n . *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), no. 9, 1153–1181.
- [22] Gui, Changfeng; Ni, Wei-Ming; Wang, Xuefeng, Further study on a nonlinear heat equation. *Jour. Diff. Equa.* **169** (2001), no. 2, 588–613.
- [23] Hale, Jack K., Asymptotic behavior of dissipative systems. *Mathematical Surveys and Monographs*, **25**. American Mathematical Society, Providence, RI, (1988).
- [24] Hale, Jack K., Dynamics of a scalar parabolic equation. Geoffrey J. Butler Memorial Conference in Differential Equations and Mathematical Biology (Edmonton, AB, 1996). *Canad. Appl. Math. Quart.* **5** (1997), no. 3, 209–305.
- [25] Hale, Jack K., Dissipation and compact attractors. *J. Dynam. Differential Equations* **18** (2006), no. 3, 485–523.
- [26] Hale, Jack K.; Raugel, Geneviève, Convergence in gradient-like systems with applications to PDE. *Z. Angew. Math. Phys.* **43** (1992), no. 1, 63–124.
- [27] Han, Qing; Lin, Fanghua, Elliptic partial differential equations. *Courant Lecture Notes in Mathematics*, **1**. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, (1997).
- [28] Haraux, A.; Polak, P., Convergence to a positive equilibrium for some nonlinear evolution equations in a ball. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)* **61** (1992), no. 2, 129–141.
- [29] Hassell, M. P., Density dependence in single-species populations. *J. Anim. Ecol.* **44**, (1975), 283–95.
- [30] Holling, C.S., The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation on the European pine sawfly. *Canadian Entomologist* **91** (1959), 294–320.
- [31] S. B. Hsu, On global stability of a predator-prey system. *Math. Biosci.* **39** (1978), 1–10.
- [32] S. B. Hsu; S. P. Hubbell; P. Waltman, Competing predators. *SIAM J. Appl. Math.* **35** (1978), no. 4, 617–625.
- [33] S. B. Hsu; J. Shi, Relaxation oscillator profile of limit cycle in predator-prey system. *Disc. Cont. Dyna. Syst.-B* **11** (2009) no. 4, 893–911.
- [34] V. S. Ivlev, Experimental ecology of the feeding of fishes. Yale University Press, (1955).
- [35] Jiang, Jifa; Liang, Xing; Zhao, Xiao-Qiang: Saddle-point behavior for monotone semiflows and reaction-diffusion models. *J. Differential Equations* **203** (2004), no. 2, 313–330.
- [36] Jiang, Jifa; Shi, Junping, Bistability dynamics in some structured ecological models. In *Spatial Ecology: a collection of essays*, CRC Press, 2009.

- [37] Kishimoto, Kazuo; Weinberger, Hans F. The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domains. *J. Differential Equations* **58** (1985), no. 1, 15–21.
- [38] Klausmeier, C.A., Regular and irregular patterns in semiarid vegetation. *Science* **284** (1999), June 11, 1826–1828.
- [39] Kolmogoroff, A., Petrovsky, I., and Piskounoff, N., Study of the diffusion equation with growth of the quantity of matter and its application to a biological problem. (French) *Moscow Univ. Bull. Math.* **1**(1937), 1–25.
- [40] Y. Kuang; H. I. Freedman, Uniqueness of limit cycles in Gause-type models of predator-prey systems. *Math. Biosci.* **88** (1988), 67–84.
- [41] Lotka, A. J., Undamped oscillations derived from the law of mass action. *J. Am. Chem. Soc.* **42**, (1920), 1595–1599.
- [42] Liu, P., Shi, J., and Wang, Y., Imperfect bifurcation with weak transversality. *Jour. Func. Anal.*, **251** (2007), no. 2, 573–600.
- [43] Ludwig, D., Jones, D., and Holling, C.S., Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and the forest. *Jour. Ani. Ecol.* **47** (1978), 315–332.
- [44] Ludwig, D.; Aronson, D. G.; Weinberger, H. F., Spatial patterning of the spruce budworm. *J. Math. Biol.* **8** (1979), no. 3, 217–258.
- [45] Malthus, Thomas Robert, An Essay On The Principle Of Population. 1st edition, London: J. Johnson, (1798).
- [46] Matano, Hiroshi, Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **15** (1979), no. 2, 401–454.
- [47] R. M. May, Limit cycles in predator-prey communities. *Science* **177**, (1972), 900–902.
- [48] Murray, J. D., Mathematical biology. Third edition. I. An introduction. *Interdisciplinary Applied Mathematics*, **17**. Springer-Verlag, New York, 2002; II. Spatial models and biomedical applications. *Interdisciplinary Applied Mathematics*, **18**. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [49] Nagumo, J., Animoto, S., Yoshizawa, S., An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. Inst. Radio Engineers*, **50**, (1962), 2061–2070.
- [50] Nicholson, A.J., An outline of the dynamics of animal populations. *Aust. J. Zool.* **2** (1954), 9–65.
- [51] Noy-Meir, I., Stability of Grazing Systems: An Application of Predator-Prey Graphs. *Jour. Ecol.* **63**, (1975), no. 2, 459–481.
- [52] Ouyang, Tiancheng and Shi, Junping, Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem. *Jour. Diff. Equa.* **146** (1998), no. 1, 121–156.
- [53] Ouyang, Tiancheng and Shi, Junping, Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem:II. *Jour. Diff. Equa.* **158**, (1999), no. 1, 94–151.
- [54] Rabinowitz, Paul H., Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *J. Func. Anal.* **7** (1971), 487–513

- [55] Rabinowitz, Paul H., Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, **65**. American Mathematical Society, Providence, (1986).
- [56] Ricker, W.E., Stock and recruitment. *J. Fish. Res. Bd Can.* **11** (1954), 559–623.
- [57] L. M. Rosenzweig, Paradox of enrichment: destabilization of exploitation ecosystems in ecological time. *Science* **171**, (1971), no. 3969, 385–387.
- [58] M. L. Rosenzweig; R. MacArthur, Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions. *Amer. Natur.* **97** (1963), 209–223.
- [59] Sattinger, D. H., *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*. *Indiana Univ. Math. J.*, **21**, (1971/72), 979–1000.
- [60] Scheffer M., and Carpenter, S.R., Catastrophic regime shifts in ecosystems: Linking theory to observation. *Trends Ecol. Evol.* **18** (2003), 648–656.
- [61] Scheffer, M., Carpenter, S., Foley, J.A., Folke, C., and Walker, B., Catastrophic shifts in ecosystems. *Nature* **413** (2001), Oct. 11, 591–596.
- [62] Shi, Junping, Persistence and bifurcation of degenerate solutions, *Jour. Func. Anal.* **169**, (1999), No. 2, 494–531.
- [63] Junping Shi, Bifurcation in infinite dimensional spaces and applications in spatiotemporal biological and chemical models. To appear in *Frontier of Mathematics in China*, (2009).
- [64] Shi, J., Solution set of semilinear elliptic equations: Global Bifurcation and Exact Multiplicity. World Scientific Publishing Co. 2009.
- [65] Shi, Junping; Shivaji, Ratnasingham, Persistence in reaction diffusion models with weak Allee effect. *Jour. Math. Biol.* **52** (2006), no. 6, 807–829.
- [66] Shi, Junping; Wang, Xuefeng, Hair-Triggered Instability of Radial Steady States, Spread and Extinction in Semilinear Heat Equations, *Journal of Differential Equations*, **231** (2006), no. 1, 235–251.
- [67] Junping Shi, Xuefeng Wang, On global bifurcation for quasilinear elliptic systems on bounded domains. *Journal of Differential Equations*, **246**, (2009), no. 7, 2788–2812.
- [68] Skellam, J. G., Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika* **38**, (1951), 196–218.
- [69] Simon, Leon, Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems. *Ann. of Math. (2)* **118** (1983), no. 3, 525–571.
- [70] Smith, H.L., Monotone dynamical systems. An introduction to the theory of competitive and cooperative systems. *Mathematical Surveys and Monographs*, **41**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [71] Smoller, Joel, Shock waves and reaction-diffusion equations. Second edition. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **258**. Springer-Verlag, New York, (1994).
- [72] Turchin, Peter, Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis. Princeton University Press, Princeton, (2003).

- [73] Turing, A.M., The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transaction of Royal Society of London*. **B237**, (1952), 37–72.
- [74] Verhulst, P. F., Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique* 10, (1838), 113–121.
- [75] V. Volterra, Fluctuations in the abundance of species, considered mathmatically, *Nature* **118**, (1926), 558.
- [76] Wang, Xuefeng, On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), no. 2, 549–590.
- [77] Wiggins, Stephen, Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. *Texts in Applied Mathematics*, **2**. Springer-Verlag, New York, (1990).
- [78] F. Yi; J. Wei; J. Shi, Bifucation analysis of a diffusive predator-prey system with Holling Type-II function response. *Jour. Diff. Equa* **246** (2009), 1944–1977.